BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI SỐ 10

NÂNG CAO





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

ĐẠI SỐ

NÂNG CAO

10



BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐOÀN QUỲNH (Tổng Chủ biên) - NGUYỄN HUY ĐOAN (Chủ biên)
NGUYỄN XUÂN LIÊM - ĐẶNG HÙNG THẮNG - TRẦN VĂN VUÔNG

ĐẠI SỐ 10

NÂNG CAO

(*Tái bản lần thứ mười bốn*)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng cho các em học sinh lớp sau !

MỘT SỐ LƯU Ý KHI SỬ DỤNG SÁCH GIÁO KHOA

1) Những kí hiệu dùng trong sách :

Hn Phần hoạt động của học sinh.

□ Kí hiệu kết thúc một chứng minh hoặc ví dụ.

2) Không nên viết vào sách để sách có thể dùng lâu dài.

3) Ngoài máy tính bỏ túi CASIO *fx* – 500 *MS* đã được giới thiệu trong sách, học sinh có thể dùng các loại máy tính bỏ túi khác có cùng tính năng như

SHARP EL – 506W, SHARP EL – 509W,…

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH
Chịu trách nhiệm nội dung : Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH

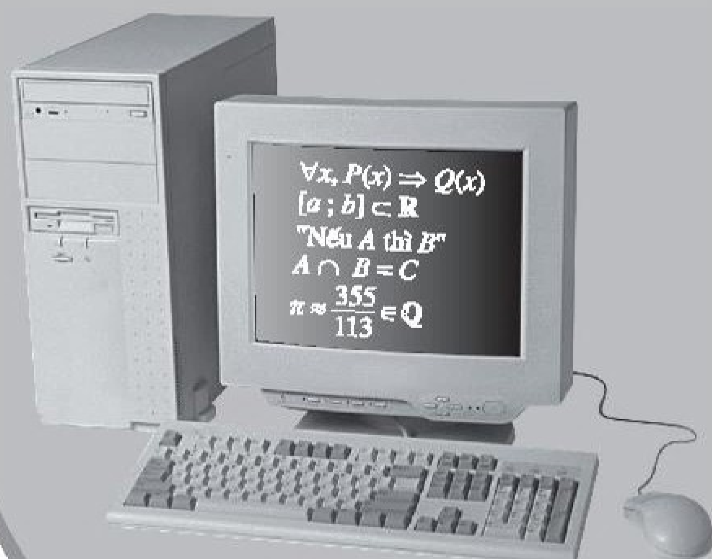
Biên tập lần đầu : PHẠM BẢO KHUÊ – HOÀNG XUÂN VINH
Biên tập tái bản : NGUYỄN TRỌNG THIỆP
Biên tập kĩ thuật : NGUYỄN KIM TOÀN – TRẦN THANH HẰNG
Trình bày bìa và minh hoạ : BÙI QUANG TUẤN
Sửa bản in : HOÀNG VIỆT
Chế bản : CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

ĐẠI SỐ 10 - NÂNG CAO

Mã số : NH001T0
In .... cuốn (QĐ in số : ....), khổ 17 × 24 cm.
Đơn vị in : .... địa chỉ ....
Cơ sở in : .... địa chỉ ....
Số ĐKXB : 01 - 2020/CXBIPH/734 - 869/GD
Số QĐXB : ... / QĐ-GD ngày ... tháng ... năm ...
In xong và nộp lưu chiểu tháng ... năm ...
Mã số ISBN : 978-604-0-19013-0

Chương 1

MỆNH ĐỀ – TẬP HỢP



Chương này sẽ cung cấp những kiến thức mở đầu về lôgic toán và tập hợp. Các khái niệm và các phép toán về **mệnh đề và tập hợp** sẽ giúp chúng ta diễn đạt các nội dung toán học thêm rõ ràng và chính xác, đồng thời giúp chúng ta hiểu đầy đủ hơn về suy luận và chứng minh trong toán học. Bởi vậy, chương này có ý nghĩa quan trọng đối với việc học tập môn Toán.

§ 1 MỆNH ĐỀ VÀ MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

1. Mệnh đề là gì ?

Trong khoa học cũng như trong đời sống hàng ngày, ta thường gặp những câu nêu lên một khẳng định. Khẳng định đó có thể đúng hoặc sai.

Ví dụ 1. Chúng ta hãy xét các câu sau đây.

(a) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.

(b) Thượng Hải là một thành phố của Ấn Độ.

(c) $1 + 1 = 2$.

(d) 27 chia hết cho 5.

Các câu (a) và (c) là những câu khẳng định đúng. Các câu (b) và (d) là những câu khẳng định sai. Người ta gọi mỗi câu trên là một *mệnh đề lôgic*. □

> *Một* ***mệnh đề lôgic*** *(gọi tắt là* ***mệnh đề****) là một câu khẳng định đúng hoặc một câu khẳng định sai. Một câu khẳng định đúng gọi là một mệnh đề* ***đúng****. Một câu khẳng định sai gọi là một mệnh đề* ***sai****. Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.*

CHÚ Ý

Câu không phải là câu khẳng định hoặc câu khẳng định mà không có tính đúng - sai (tính hoặc đúng, hoặc sai) thì không phải là mệnh đề. Chẳng hạn, câu "Hôm nay trời đẹp quá !" là một câu cảm thán do đó không phải là mệnh đề.

2. Mệnh đề phủ định

Ví dụ 2. Hai bạn An và Bình đang tranh luận với nhau.

Bình nói : "2003 là số nguyên tố".

An khẳng định : "2003 không phải là số nguyên tố".

Nếu kí hiệu P là mệnh đề Bình nêu thì mệnh đề của An có thể diễn đạt là "Không phải P" và được gọi là *mệnh đề phủ định* của P. □



> *Cho mệnh đề P. Mệnh đề "Không phải P" được gọi là **mệnh đề phủ định** của P và kí hiệu là $\overline{P}$. Mệnh đề P và mệnh đề phủ định $\overline{P}$ là hai câu khẳng định trái ngược nhau. Nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai, nếu P sai thì $\overline{P}$ đúng.*

CHÚ Ý

Mệnh đề phủ định của *P* có thể diễn đạt theo nhiều cách khác nhau. Chẳng hạn, xét mệnh đề *P* : "$\sqrt{2}$ là số hữu tỉ". Khi đó, mệnh đề phủ định của *P* có thể phát biểu là $\overline{P}$: "$\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỉ" hoặc $\overline{P}$: "$\sqrt{2}$ là một số vô tỉ".

H1 *Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau đây và xác định xem mệnh đề phủ định đó đúng hay sai.*

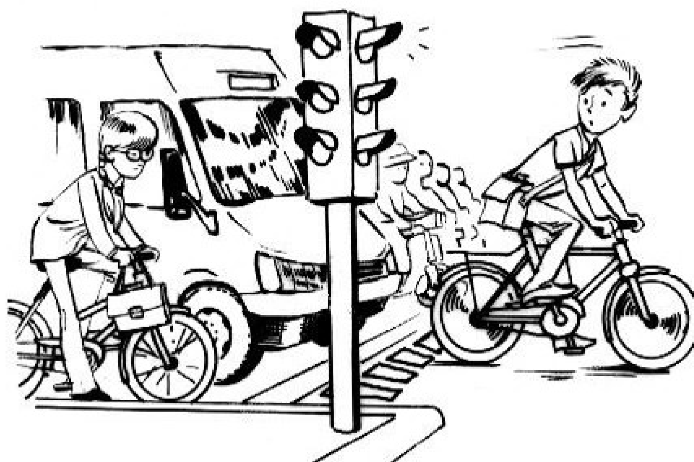
(a) Pa-ri là thủ đô của nước Anh.

(b) 2002 chia hết cho 4.

3. Mệnh đề kéo theo và mệnh đề đảo

Ví dụ 3. Xét mệnh đề "Nếu An vượt đèn đỏ thì An vi phạm luật giao thông".

Mệnh đề trên có dạng "Nếu *P* thì *Q*" trong đó *P* là mệnh đề "An vượt đèn đỏ", *Q* là mệnh đề "An vi phạm luật giao thông". Ta gọi đó là *mệnh đề kéo theo*. □



> *Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là **mệnh đề kéo theo** và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai khi P đúng, Q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.*

Tuỳ theo nội dung cụ thể, đôi khi người ta còn phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là "*P* kéo theo *Q*" hay "*P* suy ra *Q*" hay "Vì *P* nên *Q*"...

Ta thường gặp các tình huống sau :

– *Cả hai mệnh đề P và Q đều đúng. Khi đó $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề đúng.*

– *Mệnh đề P đúng và mệnh đề Q sai. Khi đó $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề sai.*

Ví dụ 4. Mệnh đề "Vì 50 chia hết cho 10 nên 50 chia hết cho 5" là mệnh đề đúng. Mệnh đề "Vì 2002 là số chẵn nên 2002 chia hết cho 4" là mệnh đề sai. □

H2 *Cho tứ giác $ABCD$. Xét mệnh đề P : "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật" và mệnh đề Q : "Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau". Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ theo nhiều cách khác nhau.*

> *Cho mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là* ***mệnh đề đảo*** *của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.*

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC. Mệnh đề đảo của mệnh đề "Nếu tam giác ABC là tam giác đều thì nó là tam giác cân" là mệnh đề "Nếu tam giác ABC là tam giác cân thì nó là tam giác đều".

4. Mệnh đề tương đương

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC. Xét mệnh đề P : "Tam giác ABC là tam giác cân" và mệnh đề Q : "Tam giác ABC có hai đường trung tuyến bằng nhau". Mệnh đề R : "Tam giác ABC là tam giác cân nếu tam giác đó có hai đường trung tuyến bằng nhau và ngược lại" còn có thể phát biểu là : "Tam giác ABC là tam giác cân nếu và chỉ nếu tam giác đó có hai đường trung tuyến bằng nhau", mệnh đề đó có dạng "P nếu và chỉ nếu Q". Ta gọi R là một *mệnh đề tương đương.* □

> *Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề có dạng "P nếu và chỉ nếu Q" được gọi là* ***mệnh đề tương đương*** *và kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.*
>
> *Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả hai mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng và sai trong các trường hợp còn lại.*

Đôi khi, người ta còn phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ là "P khi và chỉ khi Q".

Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng nếu cả hai mệnh đề P và Q cùng đúng hoặc cùng sai. Khi đó, ta nói rằng hai mệnh đề P và Q tương đương với nhau.

H3

a) Cho tam giác ABC. Mệnh đề "Tam giác ABC là một tam giác có ba góc bằng nhau nếu và chỉ nếu tam giác đó có ba cạnh bằng nhau" là mệnh đề gì ? Mệnh đề đó đúng hay sai ?

b) Xét các mệnh đề P : "36 chia hết cho 4 và chia hết cho 3" ;

Q : "36 chia hết cho 12".

i) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$ và $P \Leftrightarrow Q$.

ii) Xét tính đúng - sai của mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$.

5. Khái niệm mệnh đề chứa biến

Ví dụ 7. Xét các câu sau đây.

(1) "n chia hết cho 3", (với n là số tự nhiên).

(2) "$y > x + 3$", (với x và y là hai số thực).

Mỗi câu trên đều là một câu khẳng định chứa một hay nhiều biến nhận giá trị trong một tập hợp X nào đó. Tính đúng - sai của chúng tuỳ thuộc vào giá trị cụ thể của các biến đó. Nếu cho các biến những giá trị cụ thể trong tập X thì ta được những mệnh đề. Chẳng hạn, nếu kí hiệu câu (1) là $P(n)$ thì $P(6)$ là "6 chia hết cho 3", đó là mệnh đề đúng ; nếu kí hiệu câu (2) là $Q(x\ ;\ y)$ thì $Q(1\ ;\ 2)$ là "$2 > 1 + 3$", đó là mệnh đề sai. □

Các câu kiểu như câu (1) và câu (2) được gọi là những ***mệnh đề chứa biến***.

H4 *Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: "$x > x^2$" với x là số thực. Hỏi mỗi mệnh đề $P(2)$ và $P\left(\frac{1}{2}\right)$ đúng hay sai ?*

6. Các kí hiệu ∀ và ∃

a) Kí hiệu ∀

Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$. Khi đó khẳng định

"Với mọi x thuộc X, $P(x)$ đúng" (hay "$P(x)$ đúng với mọi x thuộc X") (1)

là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng nếu với x_0 bất kì thuộc X, $P(x_0)$ là mệnh đề đúng. Mệnh đề này sai nếu có $x_0 \in X$ sao cho $P(x_0)$ là mệnh đề sai.

Mệnh đề (1) được kí hiệu là

"$\forall x \in X, P(x)$" hoặc "$\forall x \in X : P(x)$".

Kí hiệu ∀ đọc là "với mọi".

Ví dụ 8

a) Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: "$x^2 - 2x + 2 > 0$" với x là số thực. Khi đó mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$" đúng vì với bất kì $x \in \mathbb{R}$ ta đều có

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0.$$

b) Cho mệnh đề chứa biến $P(n)$: "$2^n + 1$ là số nguyên tố" với n là số tự nhiên. Khi đó, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$" sai vì với $n = 3$ thì $P(3)$: "$2^3 + 1$ là số nguyên tố" là mệnh đề sai. □

H5 *Cho mệnh đề chứa biến $P(n)$: "$n(n+1)$ là số lẻ" với n là số nguyên. Phát biểu mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{Z}, P(n)$". Mệnh đề này đúng hay sai ?*

b) Kí hiệu ∃

Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$. Khi đó, khẳng định

"Tồn tại x thuộc X để $P(x)$ đúng" (2)

là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng nếu có $x_0 \in X$ để $P(x_0)$ là mệnh đề đúng. Mệnh đề này sai nếu với x_0 bất kì thuộc X, $P(x_0)$ là mệnh đề sai (nói cách khác là không có x_0 nào thuộc X để $P(x_0)$ là mệnh đề đúng).

Mệnh đề (2) được kí hiệu là

"$\exists x \in X, P(x)$" hoặc "$\exists x \in X : P(x)$".

Kí hiệu ∃ đọc là "tồn tại".

Ví dụ 9

a) Cho mệnh đề chứa biến $P(n)$: "$2^n + 1$ chia hết cho n" với n là số tự nhiên. Khi đó, mệnh đề "$\exists n \in \mathbb{N}, P(n)$" đúng vì với $n = 3$ thì $P(3)$: "$2^3 + 1$ chia hết cho 3" là mệnh đề đúng.

b) Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: "$(x-1)^2 < 0$" với x là số thực. Khi đó, mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, P(x)$" là mệnh đề sai vì với bất kì $x_0 \in \mathbb{R}$, ta đều có $(x_0 - 1)^2 \geq 0$. □

H6 *Cho mệnh đề chứa biến $Q(n)$: "$2^n - 1$ là số nguyên tố" với n là số nguyên dương. Phát biểu mệnh đề "$\exists n \in \mathbb{N}^*, Q(n)$". Mệnh đề này đúng hay sai ?*

7. Mệnh đề phủ định của mệnh đề có chứa kí hiệu ∀, ∃

Ví dụ 10. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $2^{2^n} + 1$ là số nguyên tố" là "Tồn tại số tự nhiên n để $2^{2^n} + 1$ không phải là số nguyên tố". □

> *Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$" là*
>
> "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$".

Ví dụ 11. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "Trong lớp em có bạn không thích môn Toán" là "Tất cả các bạn trong lớp em đều thích môn Toán". □

> *Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\exists x \in X, P(x)$" là*
>
> "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$".

H7 *Nêu mệnh đề phủ định của mệnh đề "Tất cả các bạn trong lớp em đều có máy tính".*

Câu hỏi và bài tập

1. Trong các câu dưới đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề ? Nếu là mệnh đề thì em hãy cho biết nó đúng hay sai.

a) Hãy đi nhanh lên ! ; b) $5 + 7 + 4 = 15$; c) Năm 2002 là năm nhuận.

2. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xác định xem mệnh đề phủ định đó đúng hay sai.

a) Phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có nghiệm.

b) $2^{10} - 1$ chia hết cho 11.

c) Có vô số số nguyên tố.

3. Cho tứ giác $ABCD$. Xét hai mệnh đề :

P : "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông",

Q : "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc".

Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách và cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

4. Cho mệnh đề chứa biến $P(n)$: "$n^2 - 1$ chia hết cho 4" với n là số nguyên. Xét xem mỗi mệnh đề $P(5)$ và $P(2)$ đúng hay sai.

5. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 - 1$ là bội của 3 ; b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$;

c) $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 3$; d) $\exists n \in \mathbb{N}$, $2^n + 1$ là số nguyên tố ;

e) $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n + 2$.



CÁC SỐ PHÉC-MA

Các số $F_n = 2^{2^n} + 1$ được gọi là các số Phéc-ma. Mệnh đề F : "$\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{2^n} + 1$ là số nguyên tố" do nhà toán học lỗi lạc Phéc-ma (P. Fermat, 1601 – 1665) nêu ra khi ông nhận xét thấy các số $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,537$ đều là số nguyên tố. Nhà toán học thiên tài Ơ-le (L. Euler, 1707 – 1783) đã chứng tỏ mệnh đề F sai bằng cách chỉ ra với $n = 5$ ta có $F_5 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$ chia hết cho 641, không phải là số nguyên tố.

§ 2 ÁP DỤNG MỆNH ĐỀ VÀO SUY LUẬN TOÁN HỌC

1. Định lí và chứng minh định lí

Ví dụ 1. Xét định lí "Nếu n là số tự nhiên lẻ thì $n^2 - 1$ chia hết cho 4".

Định lí này được hiểu một cách đầy đủ là "Với mọi số tự nhiên n, nếu n là số lẻ thì $n^2 - 1$ chia hết cho 4".

*Trong toán học, **định lí** là một mệnh đề đúng. Nhiều định lí được phát biểu dưới dạng*

$$"\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)", \qquad (1)$$

trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là những mệnh đề chứa biến, X là một tập hợp nào đó.

***Chứng minh định lí** dạng (1) là dùng suy luận và những kiến thức đã biết để khẳng định rằng mệnh đề (1) là đúng, tức là cần chứng tỏ rằng với mọi x thuộc X mà $P(x)$ đúng thì $Q(x)$ đúng.*

Có thể chứng minh định lí dạng (1) một cách trực tiếp hoặc gián tiếp.

• Phép chứng minh trực tiếp gồm các bước sau :

– Lấy x tuỳ ý thuộc X mà $P(x)$ đúng ;

– Dùng suy luận và những kiến thức toán học đã biết để chỉ ra rằng $Q(x)$ đúng.

Ví dụ 2. Hãy chứng minh trực tiếp định lí nêu ở ví dụ 1.

Chứng minh. Cho n là số tự nhiên lẻ tuỳ ý. Khi đó, $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Suy ra $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1)$ chia hết cho 4. □

Đôi khi việc chứng minh trực tiếp một định lí gặp khó khăn. Khi đó, ta dùng cách chứng minh gián tiếp. Một cách chứng minh gián tiếp hay được dùng là chứng minh bằng phản chứng.

• Phép chứng minh phản chứng gồm các bước sau :

– Giả sử tồn tại x_0 thuộc X sao cho $P(x_0)$ đúng và $Q(x_0)$ sai, tức là mệnh đề (1) là mệnh đề sai ;

– Dùng suy luận và những kiến thức toán học đã biết để đi đến mâu thuẫn.

Ví dụ 3. Chứng minh bằng phản chứng định lí "Trong mặt phẳng, cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Khi đó, mọi đường thẳng cắt a thì phải cắt b".

Chứng minh. Giả sử tồn tại đường thẳng c cắt a nhưng song song với b. Gọi M là giao điểm của a và c. Khi đó, qua M có hai đường thẳng a và c phân biệt cùng song song với b. Điều này mâu thuẫn với tiên đề Ơ-clít. □

H1 *Chứng minh bằng phản chứng định lí "Với mọi số tự nhiên n, nếu $3n + 2$ là số lẻ thì n là số lẻ".*

2. Điều kiện cần, điều kiện đủ

Cho định lí dưới dạng

$$"\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)". \quad (1)$$

$P(x)$ được gọi là giả thiết và $Q(x)$ là kết luận của định lí.

Định lí dạng (1) còn được phát biểu :

*$P(x)$ là **điều kiện đủ** để có $Q(x)$*

hoặc

*$Q(x)$ là **điều kiện cần** để có $P(x)$.*

Ví dụ 4. Xét định lí "Với mọi số tự nhiên n, nếu n chia hết cho 24 thì nó chia hết cho 8".

Khi đó, ta nói "n chia hết cho 24 là điều kiện đủ để n chia hết cho 8" hoặc cũng nói "n chia hết cho 8 là điều kiện cần để n chia hết cho 24". □

H2 *Định lí trong ví dụ 4 có dạng "$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow Q(n)$". Hãy phát biểu hai mệnh đề chứa biến $P(n)$ và $Q(n)$.*

3. Định lí đảo, điều kiện cần và đủ

Xét mệnh đề đảo của định lí dạng (1)

$$"\forall x \in X, Q(x) \Rightarrow P(x)". \quad (2)$$

Mệnh đề (2) có thể đúng, có thể sai. Nếu mệnh đề (2) đúng thì nó được gọi là ***định lí đảo*** của định lí dạng (1). Lúc đó định lí dạng (1) sẽ được gọi là ***định lí thuận***. Định lí thuận và đảo có thể viết gộp thành một định lí

$$"\forall x \in X, P(x) \Leftrightarrow Q(x)".$$

Khi đó, ta nói

*$P(x)$ là **điều kiện cần và đủ** để có $Q(x)$.*

Ngoài ra, ta còn nói "$P(x)$ nếu và chỉ nếu $Q(x)$" hoặc "$P(x)$ khi và chỉ khi $Q(x)$" hoặc "Điều kiện cần và đủ để có $P(x)$ là có $Q(x)$".

H3 *Xét định lí "Với mọi số nguyên dương n, n không chia hết cho 3 khi và chỉ khi n^2 chia cho 3 dư 1".*
Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu định lí trên.

Câu hỏi và bài tập

6. Phát biểu mệnh đề đảo của định lí "Trong một tam giác cân, hai đường cao ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau". Mệnh đề đảo đó đúng hay sai ?

7. Chứng minh định lí sau bằng phản chứng :

"Nếu a, b là hai số dương thì $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ".

8. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện đủ" để phát biểu định lí "Nếu a và b là hai số hữu tỉ thì tổng $a+b$ cũng là số hữu tỉ".

9. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu định lí "Nếu một số tự nhiên chia hết cho 15 thì nó chia hết cho 5".

10. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu định lí "Một tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn khi và chỉ khi tổng hai góc đối diện của nó là 180^o".

11. Chứng minh định lí sau bằng phản chứng :

"Nếu n là số tự nhiên và n^2 chia hết cho 5 thì n chia hết cho 5".



ĐÔI NÉT VỀ GIOÓC-GIƠ BUN NGƯỜI SÁNG LẬP RA LÔGIC TOÁN

Gioóc-giơ Bun sinh ngày 2-11-1815 ở Luân Đôn. Ông là con trai một nhà bán tạp hoá nhỏ. Vì nhà nghèo nên từ năm 16 tuổi ông đã phải tìm việc làm để kiếm tiền đỡ đần cha mẹ. Ông bắt đầu dạy học từ khi đó. Năm 20 tuổi, ông mở một trường tư ở quê nhà. Vừa cặm cụi dạy học, ông vừa ra sức tự học, tích luỹ vốn kiến thức toán học.



Giooc-giơ Bun
(*George Boole*, 1815 – 1864)

Hoàn toàn bằng các kiến thức tự học, ông đã bắt tay vào nghiên cứu với một niềm say mê lớn lao trong hoàn cảnh kinh tế khó khăn thiếu thốn. Với năng khiếu, sự thông minh và niềm say mê toán học, ông đã đạt được một số kết quả và bắt đầu nổi tiếng nhờ những công trình của mình như : "Giải tích toán học của lôgic", "Các định luật của tư duy". Nhờ đó, ông được bổ nhiệm làm Giáo sư toán của trường Nữ hoàng ở Ai-len (Ireland) từ năm 1849 cho đến cuối đời. Một điều khá thú vị là người con gái của ông chính là nữ văn sĩ Ê-ten Bun (Eten Boole), tác giả của cuốn tiểu thuyết "Ruồi trâu" rất nổi tiếng.

Ông mất ngày 8-12-1864, thọ 49 tuổi. Cuộc đời và sự nghiệp của ông là một tấm gương sáng đáng để chúng ta noi theo về tinh thần khắc phục khó khăn, lao động cần cù, kiên nhẫn học tập và say mê nghiên cứu, sáng tạo.

Luyện tập

12. Điền dấu "×" vào ô thích hợp trong bảng sau :

Câu	Không là mệnh đề	Mệnh đề đúng	Mệnh đề sai
$2^4 - 1$ chia hết cho 5.			
153 là số nguyên tố.			
Cấm đá bóng ở đây !			
Bạn có máy tính không ?			

13. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau :

a) Tứ giác $ABCD$ đã cho là một hình chữ nhật ;

b) 9801 là số chính phương.

14. Cho tứ giác $ABCD$. Xét hai mệnh đề

P : "Tứ giác $ABCD$ có tổng hai góc đối là 180°" ;

Q : "Tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp".

Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và cho biết mệnh đề này đúng hay sai.

15. Xét hai mệnh đề

P : "4686 chia hết cho 6" ; Q : "4686 chia hết cho 4".

Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và cho biết mệnh đề này đúng hay sai.

16. Cho tam giác ABC. Xét mệnh đề "Tam giác ABC là tam giác vuông tại A nếu và chỉ nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$". Khi viết mệnh đề này dưới dạng $P \Leftrightarrow Q$, hãy nêu mệnh đề P và mệnh đề Q.

17. Cho mệnh đề chứa biến $P(n)$: "$n = n^2$" với n là số nguyên. Điền dấu "×" vào ô vuông thích hợp.

a) $P(0)$	Đúng ☐	Sai ☐
b) $P(1)$	Đúng ☐	Sai ☐
c) $P(2)$	Đúng ☐	Sai ☐
d) $P(-1)$	Đúng ☐	Sai ☐
e) $\exists n \in \mathbb{Z}, P(n)$	Đúng ☐	Sai ☐
g) $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n)$	Đúng ☐	Sai ☐.

18. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau :

a) Mọi học sinh trong lớp em đều thích môn Toán ;

b) Có một học sinh trong lớp em chưa biết sử dụng máy tính ;

c) Mọi học sinh trong lớp em đều biết đá bóng ;

d) Có một học sinh trong lớp em chưa bao giờ được tắm biển.

19. Xác định xem các mệnh đề sau đây đúng hay sai và nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề đó :

a) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$;

b) $\exists n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ là một số chính phương ;

c) $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \neq x - 1$;

d) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 4.

20. Chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho sau đây.

Mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$" khẳng định rằng :

(A) Bình phương của mỗi số thực bằng 2.

(B) Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 2.

(C) Chỉ có một số thực có bình phương bằng 2.

(D) Nếu x là một số thực thì $x^2 = 2$.

21. Kí hiệu X là tập hợp các cầu thủ x trong đội tuyển bóng rổ, $P(x)$ là mệnh đề chứa biến "x cao trên 180 cm".

Chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho sau đây.

Mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$" khẳng định rằng :

(A) Mọi cầu thủ trong đội tuyển bóng rổ đều cao trên 180 cm.

(B) Trong số các cầu thủ của đội tuyển bóng rổ có một số cầu thủ cao trên 180 cm.

(C) Bất cứ ai cao trên 180 cm đều là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.

(D) Có một số người cao trên 180 cm là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.

§ 3 TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

1. Tập hợp

Ở lớp dưới, chúng ta đã làm quen với khái niệm tập hợp. Nhớ lại rằng

Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học. Ta hiểu khái niệm tập hợp qua các ví dụ như : Tập hợp tất cả các học sinh lớp 10 của trường em, tập hợp các số nguyên tố,... . Thông thường, mỗi tập hợp gồm các phần tử cùng có chung một hay một vài tính chất nào đó.

Nếu a là phần tử của tập hợp X, ta viết $a \in X$ (đọc là : a thuộc X). Nếu a không phải là phần tử của X, ta viết $a \notin X$ (đọc là : a không thuộc X). Để cho gọn, đôi khi "tập hợp" sẽ được gọi tắt là "tập".

Ta thường cho một tập hợp bằng hai cách sau đây.

1) Liệt kê các phần tử của tập hợp.

H1 *Viết tập hợp tất cả các chữ cái có mặt trong dòng chữ "Không có gì quý hơn độc lập tự do".*

2) Chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

H2

a) Xét tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq n \leq 20\}$. Hãy viết tập A bằng cách liệt kê các phần tử của nó.

b) Cho tập hợp $B = \{-15 ; -10 ; -5 ; 0 ; 5 ; 10 ; 15\}$. Hãy viết tập B bằng cách chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

Nói chung, khi nói đến tập hợp là nói đến các phần tử của nó. Tuy nhiên, người ta cũng xét cả tập hợp không chứa phần tử nào. Tập hợp như vậy gọi là ***tập rỗng*** và được kí hiệu là $\varnothing$.

2. Tập con và tập hợp bằng nhau

a) Tập con

*Tập A được gọi là **tập con** của tập **B** và kí hiệu là $A \subset B$ nếu mọi phần tử của tập A đều là phần tử của tập **B**.*

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Nếu $A \subset B$ thì ta còn nói tập A bị chứa trong tập B hay tập B chứa tập A và còn viết là $B \supset A$.

Từ định nghĩa tập con, dễ thấy tính chất bắc cầu sau

$$(A \subset B \text{ và } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C).$$

Cũng dễ thấy mỗi tập hợp là tập con của chính nó.

Người ta coi $\varnothing$ là tập con của mọi tập hợp, tức là $\varnothing \subset A$ với mọi tập A.

H3 *Cho hai tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ chia hết cho $6\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ chia hết cho $12\}$. Hỏi $A \subset B$ hay $B \subset A$?*

b) Tập hợp bằng nhau

> *Hai tập hợp A và B được gọi là **bằng nhau** và kí hiệu là A = B nếu mỗi phần tử của A là một phần tử của B và mỗi phần tử của B cũng là một phần tử của A.*

Từ định nghĩa này, ta có

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ và } B \subset A).$$

Hai tập hợp A và B không bằng nhau (hay khác nhau) được kí hiệu là $A \neq B$. Như vậy, hai tập hợp A và B khác nhau nếu có một phần tử của A không là phần tử của B hoặc có một phần tử của B không là phần tử của A.

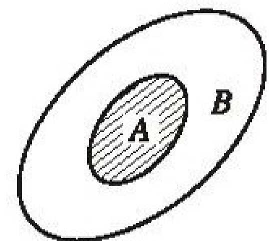
H4 *Xét định lí "Trong mặt phẳng, tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó".*

Đây có phải là bài toán chứng minh hai tập hợp bằng nhau không ? Nếu có, hãy nêu hai tập hợp đó.

c) Biểu đồ Ven

Các tập hợp có thể được minh hoạ trực quan bằng hình vẽ nhờ biểu đồ Ven do nhà toán học người Anh Giôn Ven (John Venn) lần đầu tiên đưa ra vào năm 1881. Trong biểu đồ Ven, người ta dùng những hình giới hạn bởi một đường khép kín để biểu diễn tập hợp.

Chẳng hạn, hình 1.1 thể hiện tập A là tập con của tập B.



Hình 1.1

Ví dụ 1. Chúng ta đã biết tập hợp số nguyên dương $\mathbb{N}^*$, tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$, tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$, tập hợp số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ và tập hợp số thực $\mathbb{R}$.

Ta có các quan hệ sau

$$\boxed{\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.}$$

H5 *Vẽ biểu đồ Ven mô tả các quan hệ trên.*

3. Một số các tập con của tập hợp số thực

Trong các chương sau, ta thường sử dụng các tập con sau đây của tập số thực $\mathbb{R}$.

Tên gọi và kí hiệu	Tập hợp	Biểu diễn trên trục số (phần không bị gạch chéo)
Tập số thực $(-\infty ; +\infty)$	$\mathbb{R}$	0
Đoạn $[a ; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	a b
Khoảng $(a ; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	a b
Nửa khoảng $[a ; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	a b
Nửa khoảng $(a ; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	a b
Nửa khoảng $(-\infty ; a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	a
Nửa khoảng $[a ; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	a
Khoảng $(-\infty ; a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	a
Khoảng $(a ; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	a

Trong các kí hiệu trên, kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực, kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực ; a và b được gọi là các đầu mút của đoạn, khoảng hay nửa khoảng.

H6 *Hãy ghép mỗi ý ở cột trái với một ý ở cột phải có cùng một nội dung thành cặp.*

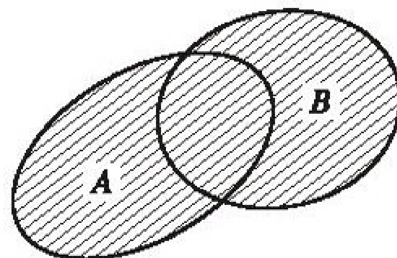
a) $x \in [1 ; 5]$; b) $x \in (1 ; 5]$; c) $x \in [5 ; +\infty)$; d) $x \in (-\infty ; 5)$;	1) $1 < x \leq 5$; 2) $x < 5$; 3) $x \geq 5$; 4) $1 \leq x \leq 5$; 5) $1 < x < 5$.

4. Các phép toán trên tập hợp

a) Phép hợp

> ***Hợp*** *của hai tập hợp A và B, kí hiệu là $A \cup B$, là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B.*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$



Hình 1.2

Trên biểu đồ Ven (h.1.2), phần gạch chéo biểu diễn hợp của hai tập hợp A và B.

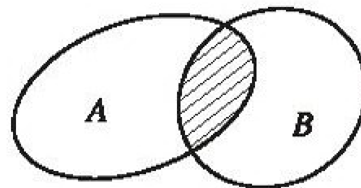
Ví dụ 2. Cho đoạn $A = [-2 ; 1]$ và khoảng $B = (1 ; 3)$. Ta có

$$A \cup B = [-2 ; 3).$$ □

b) Phép giao

> ***Giao*** *của hai tập hợp A và B, kí hiệu là $A \cap B$, là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc cả A và B.*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}.$$



Hình 1.3

Trên biểu đồ Ven (h.1.3), phần gạch chéo biểu diễn giao của hai tập hợp A và B.

Nếu hai tập hợp A và B không có phần tử chung, nghĩa là $A \cap B = \varnothing$ thì ta gọi A và B là hai tập hợp rời nhau.

Ví dụ 3. Cho nửa khoảng $A = (0 ; 2]$ và đoạn $B = [1 ; 4]$. Ta có

$$A \cap B = [1 ; 2].$$ □

H7 *Gọi A là tập hợp các học sinh giỏi Toán của trường em, B là tập hợp các học sinh giỏi Văn của trường em. Hãy mô tả hai tập $A \cup B$ và $A \cap B$.*

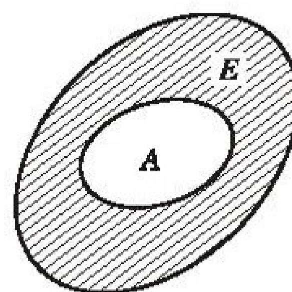
c) Phép lấy phần bù

Cho A là tập con của tập E. ***Phần bù*** *của A trong E, kí hiệu là $C_E A$[1], là tập hợp tất cả các phần tử của E mà không là phần tử của A.*

---

(1) C là chữ đầu tiên của từ tiếng Anh "complement" có nghĩa phần bù, bổ sung.

Trên biểu đồ Ven (h.1.4), phần gạch chéo biểu diễn phần bù của tập A trong E.



Hình 1.4

Ví dụ 4. Phần bù của tập các số tự nhiên trong tập các số nguyên là tập các số nguyên âm. Phần bù của tập các số lẻ trong tập các số nguyên là tập các số chẵn. □

H8 *a) Phần bù của tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$ là tập nào ?*

b) Giả sử A là tập hợp các học sinh nam trong lớp em, B là tập hợp các học sinh trong lớp em và D là tập hợp các học sinh nam trong trường em. Hãy mô tả các tập hợp : $C_B A$; $C_D A$.

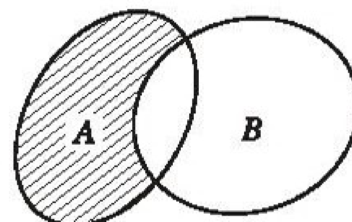
CHÚ Ý

Với hai tập hợp A, B bất kì, người ta còn xét hiệu của hai tập hợp A và B.

***Hiệu** của hai tập hợp A và B, kí hiệu là A \ B, là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B.*

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

Trên biểu đồ Ven (h.1.5), phần gạch chéo biểu diễn hiệu của hai tập A và B.



Hình 1.5

Ví dụ 5. Cho nửa khoảng $A = (1 ; 3]$ và đoạn $B = [2 ; 4]$. Khi đó, $A \setminus B = (1 ; 2)$.

Từ định nghĩa ta thấy, nếu $A \subset E$ thì

$$C_E A = E \setminus A.$$

Câu hỏi và bài tập

22. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó :

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$;

b) $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 3 < n^2 < 30\}$.

23. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó :

a) $A = \{2 ; 3 ; 5 ; 7\}$; b) $B = \{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3\}$;

c) $C = \{-5 ; 0 ; 5 ; 10 ; 15\}$.

24. Xét xem hai tập hợp sau có bằng nhau không :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2)(x-3) = 0\} \text{ và } B = \{5 ; 3 ; 1\}.$$

25. Giả sử $A = \{2 ; 4 ; 6\}$, $B = \{2 ; 6\}$, $C = \{4 ; 6\}$ và $D = \{4 ; 6 ; 8\}$. Hãy xác định xem tập nào là tập con của tập nào.

26. Cho A là tập hợp các học sinh lớp 10 đang học ở trường em và B là tập hợp các học sinh đang học môn Tiếng Anh của trường em. Hãy diễn đạt bằng lời các tập hợp sau :

a) $A \cap B$; b) $A \setminus B$; c) $A \cup B$; d) $B \setminus A$.

27. Gọi A, B, C, D, E và F lần lượt là tập hợp các tứ giác lồi, tập hợp các hình thang, tập hợp các hình bình hành, tập hợp các hình chữ nhật, tập hợp các hình thoi và tập hợp các hình vuông. Hỏi tập nào là tập con của tập nào ? Hãy diễn đạt bằng lời tập $D \cap E$.

28. Cho $A = \{1 ; 3 ; 5\}$ và $B = \{1 ; 2 ; 3\}$. Tìm hai tập hợp $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ và $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Hai tập hợp nhận được là bằng nhau hay khác nhau ?

29. Điền dấu "×" vào ô trống thích hợp.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in (2,1 ; 5,4) \Rightarrow x \in (2 ; 5)$ Đúng ☐ Sai ☐

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in (2,1 ; 5,4) \Rightarrow x \in (2 ; 6)$ Đúng ☐ Sai ☐

c) $\forall x \in \mathbb{R}, -1,2 \leq x < 2,3 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$ Đúng ☐ Sai ☐

d) $\forall x \in \mathbb{R}, -4,3 < x \leq -3,2 \Rightarrow -5 \leq x \leq -3$ Đúng ☐ Sai ☐

30. Cho đoạn $A = [-5 ; 1]$ và khoảng $B = (-3 ; 2)$. Tìm $A \cup B$ và $A \cap B$.

Luyện tập

31. Xác định hai tập hợp A và B, biết rằng :

$$A \setminus B = \{1 ; 5 ; 7 ; 8\}, B \setminus A = \{2 ; 10\} \text{ và } A \cap B = \{3 ; 6 ; 9\}.$$

32. Cho $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9\}$, $B = \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9\}$ và $C = \{3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}$. Hãy tìm $A \cap (B \setminus C)$ và $(A \cap B) \setminus C$. Hai tập hợp nhận được bằng nhau hay khác nhau ?

33. Cho A và B là hai tập hợp. Dùng biểu đồ Ven để kiểm nghiệm rằng :

a) $(A \setminus B) \subset A$; b) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$; c) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

34. Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn không lớn hơn 10, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 6\}$ và $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 4 \leq n \leq 10\}$. Hãy tìm :

a) $A \cap (B \cup C)$; b) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

35. Điền dấu "×" vào ô trống thích hợp.

a) $a \subset \{a ; b\}$ Đúng ☐ Sai ☐

b) $\{a\} \subset \{a ; b\}$ Đúng ☐ Sai ☐.

36. Cho tập hợp $A = \{a ; b ; c ; d\}$. Liệt kê tất cả các tập con của A có :

a) Ba phần tử ; b) Hai phần tử ; c) Không quá một phần tử.

37. Cho hai đoạn $A = [a ; a + 2]$ và $B = [b ; b + 1]$. Các số a, b cần thoả mãn điều kiện gì để $A \cap B \neq \varnothing$?

38. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau :

(A) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$; (B) $\mathbb{N}^* \cap \mathbb{R} = \mathbb{N}^*$.

(C) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$; (D) $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{Z}$.

39. Cho hai nửa khoảng $A = (-1 ; 0]$ và $B = [0 ; 1)$. Tìm $A \cup B$, $A \cap B$ và $C_{\mathbb{R}}A$.

40. Cho $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$;

B là tập hợp các số nguyên có chữ số tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8 ;

$C = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2k - 2, k \in \mathbb{Z}\}$;

$D = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$.

Chứng minh rằng $A = B$, $A = C$ và $A \neq D$.

41. Cho hai nửa khoảng $A = (0 ; 2]$, $B = [1 ; 4)$. Tìm $C_{\mathbb{R}}(A \cup B)$ và $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$.

42. Cho $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{b, c, e\}$.

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

(A) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$; (B) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(C) $(A \cup B) \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; (D) $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap C$.



TIỂU SỬ NHÀ TOÁN HỌC CAN-TO



Ghê-oóc Can-to
(*Georg Cantor*, 1845 – 1918)

Can-to sinh ngày 3-3-1845 tại Xanh Pê-tec-bua trong một gia đình có bố là một thương gia, mẹ là một nghệ sĩ. Tài năng và lòng say mê toán học của ông hình thành rất sớm. Sau khi tốt nghiệp phổ thông một cách xuất sắc, ông ôm ấp hoài bão đi sâu vào toán học. Bố của ông muốn ông trở thành một kĩ sư vì nghề này kiếm được nhiều tiền hơn. Nhưng ông đã quyết tâm học sâu về toán và cuối cùng, ông thuyết phục được cha bằng lòng cho ông theo học ngành Toán. Ông viết thư cho cha đại ý như sau : "Con rất sung sướng vì cha đã đồng ý cho con theo đuổi hoài bão của con. Tâm hồn con, cơ thể con sống theo hoài bão ấy". Ông bảo vệ luận án Tiến sĩ tại trường đại học Bec-lin vào năm 1867. Từ năm 1869 đến 1905, ông dạy ở trường đại học Ha-lơ (Halle). Ông là người sáng lập nên lí thuyết tập hợp. Ngay sau khi ra đời, lí thuyết tập hợp đã là cơ sở cho một cuộc cách mạng trong viết sách và giảng dạy toán. Những công trình toán học của ông đã để lại dấu ấn sâu sắc cho các thế hệ các nhà toán học lớp sau. Năm 1925, Hin-be (D. Hilbert), nhà toán học lỗi lạc của thế kỉ XX đã viết : "Tôi đã tìm thấy trong các công trình của ông vẻ đẹp của hoa và trí tuệ. Tôi nghĩ rằng đó là đỉnh cao của hoạt động trí tuệ của con người". Từ năm 40 tuổi, tuy có những thời kì đau ốm phải nằm viện nhưng ông vẫn không ngừng sáng tạo. Một trong những công trình quan trọng của ông đã được hoàn thành trong khoảng thời gian giữa hai cơn đau. Ông mất ngày 6-1-1918 tại một bệnh viện ở Ha-lơ, thọ 73 tuổi.

§ 4 SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

1. Số gần đúng

Trong nhiều trường hợp, ta không biết được giá trị đúng của đại lượng ta đang quan tâm mà chỉ biết giá trị gần đúng của nó. Cả hai kết quả đo chiều dài chiếc bàn ở hình bên chỉ là các giá trị gần đúng với chiều dài thực của chiếc bàn.



H1 *Theo Tổng cục Thống kê, dân số nước ta tại thời điểm ngày 1-4-2003 là 80 902,4 nghìn người, trong đó số nam là 39 755,4 nghìn người, số nữ là 41 147,0 nghìn người ; thành thị có 20 869,5 nghìn người và nông thôn có 60 032,9 nghìn người.*

Hỏi các số liệu nói trên là số đúng hay số gần đúng ?

2. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

a) Sai số tuyệt đối

> *Giả sử $\overline{a}$ là giá trị đúng của một đại lượng và a là giá trị gần đúng của $\overline{a}$. Giá trị $|\overline{a} - a|$ phản ánh mức độ sai lệch giữa $\overline{a}$ và a. Ta gọi $|\overline{a} - a|$ là **sai số tuyệt đối** của số gần đúng a và kí hiệu là Δ_a, tức là*
>
> $$\Delta_a = |\overline{a} - a|.$$

Trên thực tế, nhiều khi ta không biết $\overline{a}$ nên không thể tính được chính xác Δ_a. Tuy nhiên, ta có thể đánh giá được Δ_a không vượt quá một số dương d nào đó.

Ví dụ 1. Giả sử $\overline{a} = \sqrt{2}$ và một giá trị gần đúng của nó là $a = 1,41$. Ta có :

$(1,41)^2 = 1,9881 < 2 \Rightarrow 1,41 < \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} - 1,41 > 0$;

$(1,42)^2 = 2,0164 > 2 \Rightarrow 1,42 > \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} - 1,41 < 0,01$.

Do đó

$$\Delta_a = \left|\overline{a} - a\right| = \left|\sqrt{2} - 1,41\right| < 0,01.$$

Vậy sai số tuyệt đối của 1,41 không vượt quá 0,01. □

Nếu $\Delta_a \le d$ thì $a - d \le \overline{a} \le a + d$. Khi đó, ta quy ước viết

$$\overline{a} = a \pm d.$$

Như vậy, khi viết $\overline{a} = a \pm d$, ta hiểu số đúng $\overline{a}$ nằm trong đoạn $[a - d \,;\, a + d]$.

Bởi vậy, d càng nhỏ thì độ sai lệch của số gần đúng a so với số đúng $\overline{a}$ càng ít. Thành thử d được gọi là ***độ chính xác của số gần đúng***.

H2 *Kết quả đo chiều dài một cây cầu được ghi là 152 m ± 0,2 m. Điều đó có nghĩa như thế nào ?*

b) Sai số tương đối

Ví dụ 2. Kết quả đo chiều cao một ngôi nhà được ghi là 15,2 m ± 0,1 m.

Ta muốn so sánh độ chính xác của phép đo này với phép đo chiều dài cây cầu nói trong **H2**.

Thoạt nhìn, ta thấy dường như phép đo này có độ chính xác cao hơn phép đo xét trong **H2**. □

Để so sánh độ chính xác của hai phép đo đạc hay tính toán, người ta đưa ra khái niệm sai số tương đối.

> ***Sai số tương đối*** *của số gần đúng a*, kí hiệu là δ_a, *là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và |a|, tức là*
>
> $$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}.$$

Nếu $\overline{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \le d$. Do đó $\delta_a \le \dfrac{d}{|a|}$.

Nếu $\dfrac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo đạc hay tính toán càng cao.

Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

• Trở lại ví dụ 2 ở trên, ta thấy : Trong phép đo chiều dài cây cầu thì sai số tương đối không vượt quá $\dfrac{0,2}{152} \approx 0,13\%$. Trong phép đo chiều cao ngôi nhà thì sai số tương đối không vượt quá $\dfrac{0,1}{15,2} \approx 0,66\%$.

Như vậy, phép đo chiều dài cây cầu có độ chính xác cao hơn. □

H3 *Số $\overline{a}$ được cho bởi giá trị gần đúng $a = 5,7824$ với sai số tương đối không vượt quá 0,5%. Hãy đánh giá sai số tuyệt đối của $\overline{a}$.*

3. Số quy tròn

Trong thực tế đo đạc và tính toán, nhiều khi người ta chỉ cần biết giá trị gần đúng của một đại lượng với độ chính xác nào đó (kể cả khi có thể biết được giá trị đúng của nó). Khi đó để cho gọn, các số thường được *quy tròn*.

Tuỳ mức độ cho phép, ta có thể quy tròn một số đến hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm, ... hay đến hàng phần chục, hàng phần trăm, hàng phần nghìn, ... (gọi là hàng quy tròn) theo nguyên tắc sau :

• Nếu chữ số ngay sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta chỉ việc thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi 0.

• Nếu chữ số ngay sau hàng quy tròn lớn hơn hay bằng 5 thì ta thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi 0 và cộng thêm một đơn vị vào chữ số ở hàng quy tròn.

Ví dụ 3. Nếu quy tròn số 7216,4 đến hàng chục thì chữ số ở hàng quy tròn là 1, chữ số ngay sau đó là 6 ; do 6 > 5 nên ta có số quy tròn là 7220. □

Ví dụ 4. Nếu quy tròn số 2,654 đến hàng phần trăm (tức là chữ số thứ hai sau dấu phẩy) thì chữ số ngay sau hàng quy tròn là 4 ; do 4 < 5 nên số quy tròn là 2,65. □

Ta thấy trong ví dụ 3 và ví dụ 4, sai số tuyệt đối lần lượt là

$$|7216{,}4 - 7220| = 3{,}6 < 5\ ;$$
$$|2{,}654 - 2{,}65| = 0{,}004 < 0{,}005.$$

Nhận xét. *Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng quy tròn. Như vậy, độ chính xác của số quy tròn bằng nửa đơn vị của hàng quy tròn.*

H4 *Quy tròn số 7216,4 đến hàng đơn vị, số 2,654 đến hàng phần chục rồi tính sai số tuyệt đối của số quy tròn.*

CHÚ Ý

1) Khi quy tròn số đúng $\overline{a}$ đến một hàng nào thì ta nói số gần đúng a nhận được là chính xác đến hàng đó. Chẳng hạn, số gần đúng của π chính xác đến hàng phần trăm là 3,14 ; số gần đúng của $\sqrt{2}$ chính xác đến hàng phần nghìn là 1,414.

2) Nếu kết quả cuối cùng của bài toán yêu cầu chính xác đến hàng $\frac{1}{10^n}$ thì trong quá trình tính toán, ở kết quả của các phép tính trung gian, ta cần lấy chính xác ít nhất đến hàng $\frac{1}{10^{n+1}}$.

3) Cho số gần đúng a với độ chính xác d (tức là $\overline{a} = a \pm d$). Khi được yêu cầu quy tròn số a mà không nói rõ quy tròn đến hàng nào thì ta quy tròn số a đến hàng thấp nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó.

Chẳng hạn, cho $\overline{a} = 1{,}236 \pm 0{,}002$ và ta phải quy tròn số 1,236. Ta thấy $0{,}001 < 0{,}002 < 0{,}01$ nên hàng thấp nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần trăm. Vậy ta phải quy tròn số 1,236 đến hàng phần trăm. Kết quả là $\overline{a} \approx 1{,}24$.

4. Chữ số chắc và cách viết chuẩn số gần đúng

a) Chữ số chắc

*Cho số gần đúng a của số $\overline{a}$ với độ chính xác d. Trong số a, một chữ số được gọi là **chữ số chắc** (hay **đáng tin**) nếu d không vượt quá nửa đơn vị của hàng có chữ số đó.*

Nhận xét. *Tất cả các chữ số đứng bên trái chữ số chắc đều là chữ số chắc. Tất cả các chữ số đứng bên phải chữ số không chắc đều là chữ số không chắc.*

Ví dụ 5. Trong một cuộc điều tra dân số, người ta báo cáo số dân của tỉnh A là

$$1\,379\,425 \text{ người} \pm 300 \text{ người}.$$

Vì $\frac{100}{2} = 50 < 300 < 500 = \frac{1000}{2}$ nên chữ số hàng nghìn (chữ số 9) là chữ số chắc. Vậy các chữ số chắc là 1, 3, 7 và 9 □

b) Dạng chuẩn của số gần đúng

Trong cách viết $\overline{a} = a \pm d$, ta biết ngay độ chính xác d của số gần đúng a (tức là $a - d \le \overline{a} \le a + d$). Ngoài cách viết trên, người ta còn quy ước dạng viết chuẩn của số gần đúng và khi cho một số gần đúng dưới dạng chuẩn, ta cũng biết được độ chính xác của nó.

• Nếu số gần đúng là số thập phân không nguyên thì dạng chuẩn là dạng mà mọi chữ số của nó đều là chữ số chắc.

Ví dụ 6. Cho một giá trị gần đúng của $\sqrt{5}$ được viết dưới dạng chuẩn là 2,236 ($\sqrt{5} \approx 2{,}236$). Ở đây, hàng thấp nhất có chữ số chắc là hàng phần nghìn nên độ chính xác của nó là $\frac{1}{2}.10^{-3} = 0{,}0005$. Do đó, ta biết được : $2{,}236 - 0{,}0005 \le \sqrt{5} \le 2{,}236 + 0{,}0005$.

• Nếu số gần đúng là số nguyên thì dạng chuẩn của nó là $A.10^k$, trong đó A là số nguyên, 10^k là hàng thấp nhất có chữ số chắc ($k \in \mathbb{N}$).

(Từ đó, mọi chữ số của A đều là chữ số chắc).

Ví dụ 7. Số dân của Việt Nam (năm 2005) vào khoảng 83.10^6 người (83 triệu người). Ở đây, $k = 6$ nên độ chính xác của số gần đúng này là $\frac{1}{2}.10^6 = 500\,000$. Do đó, ta biết được số dân của Việt Nam trong khoảng từ 82,5 triệu người đến 83,5 triệu người.

CHÚ Ý

Các số gần đúng trong "Bảng số với bốn chữ số thập phân" (bảng Bra-đi-xơ) hoặc máy tính bỏ túi đều được cho dưới dạng chuẩn.

Ví dụ 8. Dùng máy tính bỏ túi để tính $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, ta được kết quả là 3,146 264 37. Ta hiểu số gần đúng này được viết dưới dạng chuẩn, nó có độ chính xác là $\frac{1}{2}.10^{-8}$.

(Đối với một số loại máy tính như *CASIO fx – 500 MS*, ta có thể sử dụng chức năng định trước độ chính xác của kết quả đã được cài sẵn trong máy).

CHÚ Ý

Với quy ước về dạng chuẩn số gần đúng thì hai số gần đúng 0,14 và 0,140 viết dưới dạng chuẩn có ý nghĩa khác nhau. Số gần đúng 0,14 có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,005 còn số gần đúng 0,140 có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,0005.

5. Kí hiệu khoa học của một số

Mỗi số thập phân khác 0 đều viết được dưới dạng $\alpha.10^n$, trong đó $1 \le |\alpha| < 10$, $n \in \mathbb{Z}$.

(Quy ước rằng nếu $n = -m$, với m là số nguyên dương thì $10^{-m} = \frac{1}{10^m}$).

Dạng như thế được gọi là ***kí hiệu khoa học*** của số đó. Người ta thường dùng kí hiệu khoa học để ghi những số rất lớn hoặc rất bé. Số mũ n của 10 trong kí hiệu khoa học của một số cho ta thấy độ lớn (bé) của số đó.

Ví dụ 9. Khối lượng của Trái Đất viết dưới dạng kí hiệu khoa học là

$$5,98.10^{24} \text{ kg}.$$

Khối lượng nguyên tử của Hiđrô viết dưới dạng kí hiệu khoa học là

$$1,66.10^{-24} \text{ g}.$$ □

Câu hỏi và bài tập

43. Các nhà toán học cổ đại Trung Quốc đã dùng phân số $\frac{22}{7}$ để xấp xỉ số π. Hãy đánh giá sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng này, biết $3,1415 < \pi < 3,1416$.

44. Một tam giác có ba cạnh đo được như sau : $a = 6,3 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$; $b = 10 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm}$ và $c = 15 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm}$. Chứng minh rằng chu vi P của tam giác là $P = 31,3 \text{ cm} \pm 0,5 \text{ cm}$.

45. Một cái sân hình chữ nhật với chiều rộng là $x = 2,56 \text{ m} \pm 0,01 \text{ m}$ và chiều dài là $y = 4,2 \text{ m} \pm 0,01 \text{ m}$.

Chứng minh rằng chu vi P của sân là $P = 13,52 \text{ m} \pm 0,04 \text{ m}$.

46. Sử dụng máy tính bỏ túi :

a) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2}$ chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn.

b) Viết giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{100}$ chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn.

47. Biết rằng tốc độ ánh sáng trong chân không là 300 000 km/s. Hỏi một năm ánh sáng đi được trong chân không là bao nhiêu (giả sử một năm có 365 ngày) ? (Hãy viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học).

48. Một đơn vị thiên văn xấp xỉ bằng $1,496.10^{8}$ km. Một trạm vũ trụ di chuyển với vận tốc trung bình là 15 000 m/s. Hỏi trạm vũ trụ đó phải mất bao nhiêu giây mới đi được một đơn vị thiên văn ? (Hãy viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học).

49. Vũ trụ có tuổi khoảng 15 tỉ năm. Hỏi Vũ trụ có bao nhiêu ngày tuổi (giả sử một năm có 365 ngày) ? (Hãy viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học).

Bài đọc thêm

LOÀI NGƯỜI ĐÃ SỬ DỤNG CÁC HỆ ĐẾM CƠ SỐ NÀO ?

Đa số các dân tộc trên thế giới dùng hệ đếm thập phân để biểu diễn các số. Tuy nhiên, ngoài hệ thập phân còn có các hệ đếm cơ số khác.

Cho b là một số nguyên dương lớn hơn 1. Khi đó, mọi số nguyên dương n có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng $n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + ... + a_1 b + a_0$,

ở đây $k \in \mathbb{N}$, a_0, a_1, ..., a_k là các số nguyên không âm nhỏ hơn b và $a_k \neq 0$. Người ta kí hiệu $n = (a_k ... a_1 a_0)_b$ và gọi đó là biểu diễn của n trong hệ đếm cơ số b.

Hệ đếm sớm nhất của loài người không phải là hệ đếm thập phân mà là hệ đếm cơ số 60 của người Ba-bi-lon. Vào thời cổ đại, cũng có các bộ tộc dùng hệ đếm cơ số 5. Người Mai-a ở Nam Mĩ có một nền văn hoá khá độc đáo từng sử dụng hệ đếm cơ số 20. Tại Đan Mạch ngày nay, người ta vẫn còn dùng hệ đếm cơ số 20. Người Anh rất thích dùng hệ đếm cơ số 12, người ta tính 12 bút chì là một tá bút chì, 24 bút chì là hai tá bút chì.

Đến khi có máy tính điện tử thì hệ nhị phân lại được ưa chuộng. Trong hệ nhị phân để ghi các con số, ta chỉ cần hai chữ số 0 và 1. Có thể dùng số 1 biểu diễn việc đóng mạch, số 0 biểu diễn việc ngắt mạch ; hoặc 1 biểu diễn trạng thái bị từ hoá, 0 là trạng thái không bị từ hoá, ... Từ đó cho thấy hệ nhị phân rất thích hợp cho việc biểu diễn các thông tin trên máy tính.

Chẳng hạn, do $69 = 2^6 + 2^2 + 2^0$ nên 69 được viết trong hệ nhị phân là $(1000101)_2$. Số 351 có biểu diễn trong hệ nhị phân là $(101011111)_2$ vì $(101011111)_2 =$ $= 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 351$. Số 100 000 được viết dưới dạng nhị phân là $(11000011010100000)_2$.

Nhược điểm của hệ nhị phân là các số viết trong hệ nhị phân đều dài và khó đọc. Để khắc phục điều này trong máy tính, người ta dùng hai hệ đếm bổ trợ là hệ đếm cơ số 8 và hệ đếm cơ số 16. Độ dài một số viết ra trong hệ đếm cơ số 8 chỉ bằng khoảng $\frac{1}{3}$ độ dài viết trong hệ nhị phân và không khác mấy so với viết trong hệ thập phân. Tương tự như vậy, độ dài một số viết ra trong hệ đếm cơ số 16 chỉ bằng khoảng $\frac{1}{4}$ độ dài viết trong hệ nhị phân. Việc chuyển đổi giữa hệ nhị phân sang hệ đếm cơ số 8 hay 16 và ngược lại rất đơn giản. Vì thế, hệ đếm cơ số 8 và 16 đã trợ giúp đắc lực cho việc giao tiếp giữa người và máy tính.



LỊCH SỬ CỦA VIỆC TÍNH GẦN ĐÚNG SỐ π

Số π là số vô tỉ, nó có biểu diễn thập phân là số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Trong lịch sử toán học đã xuất hiện một "cuộc đua" nhằm đạt kỉ lục về việc tính gần đúng số π với nhiều chữ số (nghĩa là với độ chính xác càng cao). Người đầu tiên tính số π tới bảy chữ số là Tô Xung Chi, nhà toán học Trung Quốc (thế kỉ V). Nhà toán học Ru-đôn-phơ (C. Rudolff, 1499 – 1545) người Đức đã tính số π tới 35 chữ số. Ông rất tự hào về điều này và để lại di chúc khắc 35 chữ số này trên bia mộ của ông. Ngày nay với sự trợ giúp của máy tính, các kỉ lục về tính số π với nhiều chữ số liên tiếp bị vượt qua trong một thời gian ngắn. Chúng ta xem bảng sau đây sẽ rõ.

Năm	Quốc tịch người tính số π	Số chữ số của số π
1957	Mĩ	100 265
1973	Pháp	1 triệu
1983	Nhật	16 triệu
1986	Mĩ	30 triệu
1987	Nhật	1335 triệu
1989	Mĩ	4 tỉ
2002	Nhật	1241 tỉ

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương I

50. Chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho sau đây.

Cho mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$". Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là :

(A) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$; (B) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$;

(C) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$; (D) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$.

51. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện đủ" để phát biểu các định lí sau đây.

a) Nếu tứ giác $MNPQ$ là một hình vuông thì hai đường chéo MP và NQ bằng nhau.

b) Trong mặt phẳng, nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng ấy song song với nhau.

c) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.

52. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu các định lí sau đây.

a) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có các đường trung tuyến tương ứng bằng nhau.

b) Nếu một tứ giác là hình thoi thì nó có hai đường chéo vuông góc với nhau.

53. Hãy phát biểu định lí đảo (nếu có) của các định lí sau đây rồi sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" hoặc "nếu và chỉ nếu" hoặc "khi và chỉ khi" để phát biểu gộp cả hai định lí thuận và đảo.

a) Nếu n là số nguyên dương lẻ thì $5n + 6$ cũng là số nguyên dương lẻ.

b) Nếu n là số nguyên dương chẵn thì $7n + 4$ cũng là số nguyên dương chẵn.

54. Chứng minh các định lí sau đây bằng phương pháp phản chứng.

a) Nếu $a + b < 2$ thì một trong hai số a và b phải nhỏ hơn 1.

b) Cho n là số tự nhiên, nếu $5n + 4$ là số lẻ thì n là số lẻ.

55. Gọi E là tập hợp các học sinh của một trường trung học phổ thông. Xét các tập con sau của E : tập hợp các học sinh lớp 10, kí hiệu là A ; tập hợp các học sinh học Tiếng Anh, kí hiệu là B. Hãy biểu diễn các tập hợp sau đây theo A, B và E.

a) Tập hợp các học sinh lớp 10 học Tiếng Anh của trường đó.

b) Tập hợp các học sinh lớp 10 không học Tiếng Anh của trường đó.

c) Tập hợp các học sinh không học lớp 10 hoặc không học Tiếng Anh của trường đó.

56. a) Ta biết rằng $|x - 3|$ là khoảng cách từ điểm x tới điểm 3 trên trục số.

Hãy biểu diễn trên trục số các điểm x mà $|x - 3| \leq 2$.

b) Điền tiếp vào chỗ còn trống (...) trong bảng dưới đây.

$x \in [1 ; 5]$	$1 \leq x \leq 5$	$\lvert x - 3 \rvert \leq 2$
$x \in$ ...	$1 \leq x \leq 7$	$\lvert x -$ ... $\rvert \leq$ ...
$x \in$ ...	... $\leq x \leq 3{,}1$	$\lvert x -$ ... $\rvert \leq 0{,}1$

57. Điền tiếp vào chỗ còn trống (...) trong bảng dưới đây.

$2 \le x \le 5$	$x \in [2 ; 5]$
$-3 \le x \le 2$	$x \in ...$
...	$x \in [-1 ; 5]$
...	$x \in (-\infty ; 1]$
$-5 < x$	$x \in ...$

58. Cho biết giá trị gần đúng của số π với 10 chữ số thập phân là

$$\pi \approx 3{,}141\,592\,653\,5.$$

a) Giả sử ta lấy giá trị 3,14 làm giá trị gần đúng của π. Chứng tỏ sai số tuyệt đối không vượt quá 0,002.

b) Giả sử ta lấy giá trị 3,1416 làm giá trị gần đúng của π. Chứng tỏ sai số tuyệt đối không vượt quá 0,0001.

59. Một hình lập phương có thể tích là $V = 180{,}57\,\text{cm}^3 \pm 0{,}05\,\text{cm}^3$. Xác định các chữ số chắc của V.

60. Cho hai nửa khoảng $A = (-\infty ; m]$ và $B = [5 ; +\infty)$. Tìm $A \cap B$ (biện luận theo m).

61. Cho hai khoảng $A = (m ; m + 1)$ và $B = (3 ; 5)$. Tìm m để $A \cup B$ là một khoảng. Hãy xác định khoảng đó.

62. Hãy viết kí hiệu khoa học của các kết quả sau :

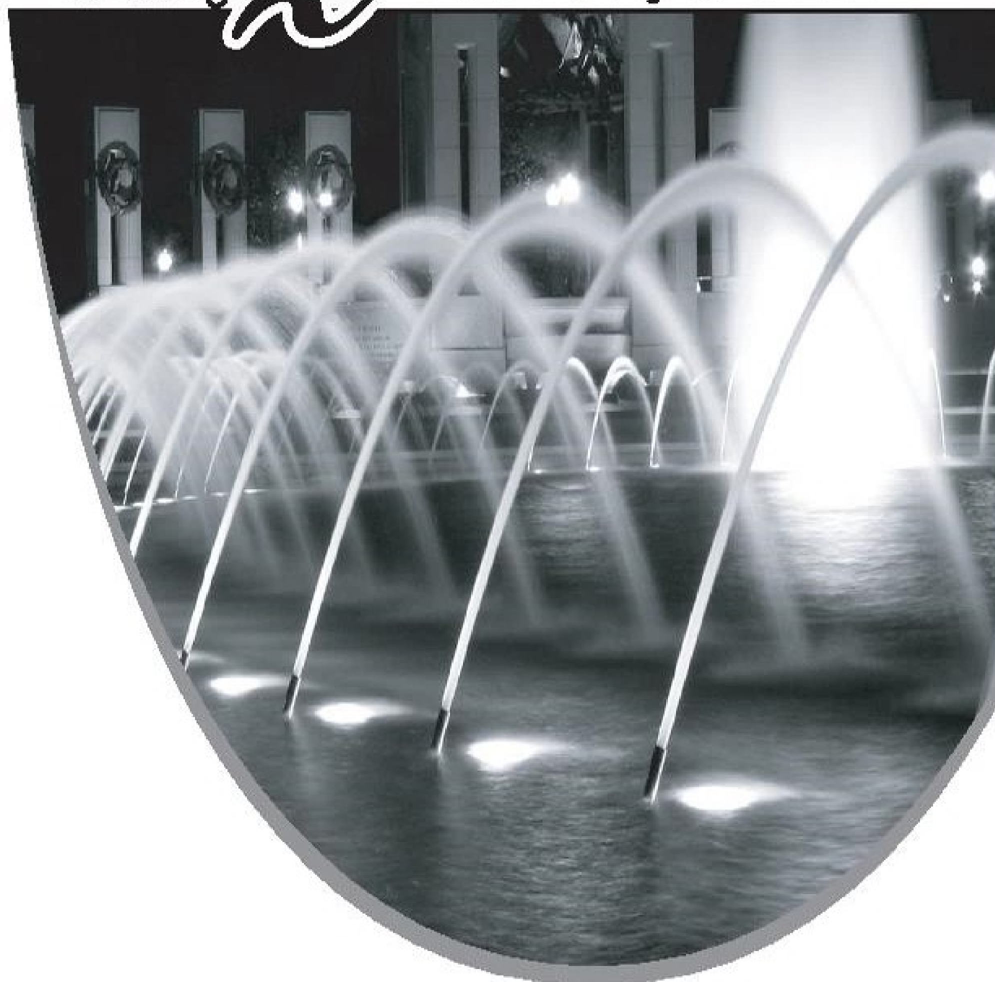
a) Người ta coi trên đầu mỗi người có 150 000 sợi tóc. Hỏi một nước có 80 triệu dân thì tổng số sợi tóc của mọi người dân của nước đó là bao nhiêu ?

b) Biết rằng sa mạc Sa-ha-ra rộng khoảng 8 triệu km^2. Giả sử trên mỗi mét vuông bề mặt ở đó có 2 tỉ hạt cát và toàn bộ sa mạc phủ bởi cát. Hãy cho biết số hạt cát trên bề mặt sa mạc này.

c) Biết rằng 1 mm^3 máu người chứa khoảng 5 triệu hồng cầu và mỗi người có khoảng 6 lít máu. Tính số hồng cầu của mỗi người.

Chương 2

HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI



Hàm số là một trong các khái niệm cơ bản của toán học. Những gì chúng ta đã biết về hàm số ở lớp dưới, nhất là về **hàm số bậc nhất và bậc hai** sẽ được hoàn thiện thêm một bước ở chương này. Kĩ năng vẽ và đọc đồ thị của hàm số, tức là nhận biết các tính chất của hàm số thông qua đồ thị của nó là một yêu cầu quan trọng trong chương mà chúng ta cần chú ý rèn luyện.

§ 1 ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

1. Khái niệm về hàm số

a) Hàm số

Ở lớp dưới, chúng ta đã làm quen với khái niệm hàm số. Sau đây, ta nhắc lại và bổ sung thêm về khái niệm này.

ĐỊNH NGHĨA

Cho một tập hợp khác rỗng $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.

Hàm số *f xác định trên $\mathcal{D}$ là một quy tắc đặt tương ứng mỗi số x thuộc $\mathcal{D}$ với một và chỉ một số, kí hiệu là $f(x)$; số $f(x)$ đó gọi là* ***giá trị*** *của hàm số f tại x.*

Tập $\mathcal{D}$ gọi là ***tập xác định*** (hay ***miền xác định***), x gọi là ***biến số*** hay ***đối số*** của hàm số f.

Để chỉ rõ kí hiệu biến số, hàm số f còn được viết là $y = f(x)$, hay đầy đủ hơn là $f : \begin{array}{l} \mathcal{D} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = f(x) \end{array}$

Ví dụ 1. Trích bảng thông báo lãi suất tiết kiệm của một ngân hàng :

Loại kì hạn (tháng)	**VND (%/ năm)** lĩnh lãi cuối kì, áp dụng từ 08 – 11 – 2005
1	6,60
2	7,56
3	8,28
6	8,52
9	8,88
12	9,00

Bảng trên cho ta *quy tắc* để tìm số phần trăm lãi suất s tuỳ theo loại kì hạn k tháng. Kí hiệu *quy tắc* ấy là f, ta có hàm số $s = f(k)$ xác định trên tập

$$T = \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 12\}.$$

b) Hàm số cho bằng biểu thức

Nếu $f(x)$ là một biểu thức của biến x thì với mỗi giá trị của x, ta tính được một giá trị tương ứng duy nhất của $f(x)$ (nếu nó xác định). Do đó, ta có hàm số $y = f(x)$. Ta nói hàm số đó được *cho bằng biểu thức* $f(x)$.

Khi cho hàm số bằng biểu thức, ta quy ước rằng :

> *Nếu không có giải thích gì thêm thì tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho giá trị của biểu thức $f(x)$ được xác định.*

H1 *Với mỗi hàm số cho ở phần a) và b) sau đây, hãy chọn kết luận đúng trong các kết luận đã cho.*

a) Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x}}{(x-1)(x-2)}$ *là :*

(A) $\mathbb{R}_+$; (B) $\{x \mid x \neq 1$ và $x \neq 2\}$; (C) $\mathbb{R}_+ \setminus \{1 ; 2\}$; (D) $(0 ; +\infty)$.

b) Tập xác định của hàm số (hàm dấu) $d(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$ *là :*

(A) $\mathbb{R}_-$; (B) $\mathbb{R}$; (C) $\mathbb{R}_+$; (D) $\{-1 ; 0 ; 1\}$.

CHÚ Ý

Trong kí hiệu hàm số $y = f(x)$, ta còn gọi x là biến số độc lập, y là biến số phụ thuộc của hàm số f. *Biến số độc lập và biến số phụ thuộc của một hàm số có thể được kí hiệu bởi hai chữ cái tuỳ ý khác nhau*. Chẳng hạn, $y = x^2 - 2x - 3$ và $u = t^2 - 2t - 3$ là hai cách viết biểu thị cùng một hàm số.

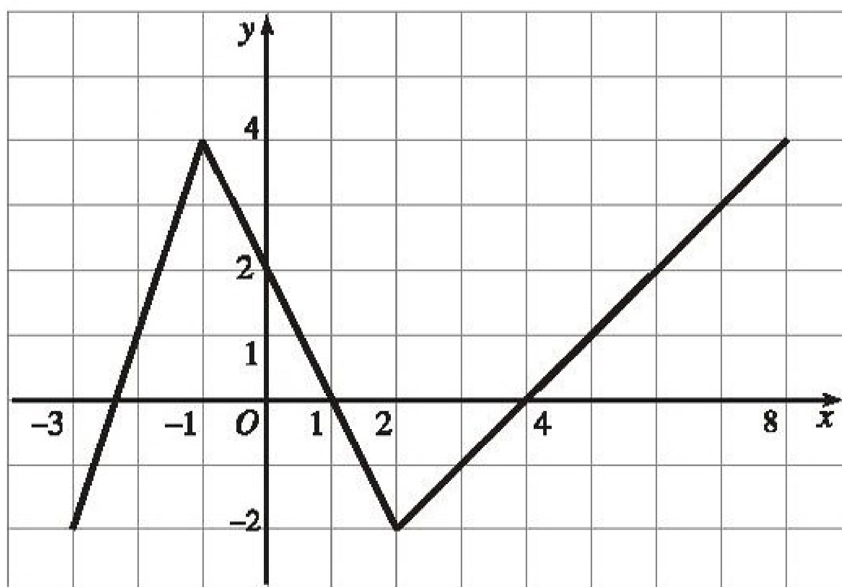
c) Đồ thị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$. Ta đã biết : Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp (G) các điểm có toạ độ $\big(x ; f(x)\big)$ với $x \in \mathcal{D}$, gọi là ***đồ thị*** *của hàm số* f. Nói cách khác,

$$M(x_0 ; y_0) \in (G) \Leftrightarrow x_0 \in \mathcal{D} \text{ và } y_0 = f(x_0).$$

Qua đồ thị của một hàm số, ta có thể nhận biết được nhiều tính chất của hàm số đó.

Ví dụ 2. Hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-3 ; 8]$ được cho bằng đồ thị như trong hình 2.1.



Hình 2.1

Dựa vào đồ thị đã cho, ta có thể nhận biết được (với độ chính xác nào đó) :

– Giá trị của hàm số tại một số điểm, chẳng hạn $f(-3) = -2$, $f(1) = 0$;

– Các giá trị đặc biệt của hàm số, chẳng hạn, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-3 ; 8]$ là -2 ;

– Dấu của $f(x)$ trên một khoảng, chẳng hạn nếu $1 < x < 4$ thì $f(x) < 0$. □

2. Sự biến thiên của hàm số

a) Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến

• Khi nghiên cứu một hàm số, người ta thường quan tâm đến sự *tăng* hay *giảm* của giá trị hàm số khi đối số tăng.

Ví dụ 3. Xét hàm số $f(x) = x^2$. Gọi x_1 và x_2 là hai giá trị tuỳ ý của đối số.

Trường hợp 1 : Khi x_1 và x_2 thuộc nửa khoảng $[0 ; +\infty)$, ta có

$$0 \le x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Trường hợp 2 : Khi x_1 và x_2 thuộc nửa khoảng $(-\infty ; 0]$, ta có

$$x_1 < x_2 \le 0 \Rightarrow |x_1| > |x_2| \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$ □

H2 *Ở ví dụ 3, khi đối số tăng, trong trường hợp nào thì :*

a) Giá trị của hàm số tăng ?

b) Giá trị của hàm số giảm ?

Từ đây, ta luôn hiểu K là một khoảng (nửa khoảng hay đoạn) nào đó của $\mathbb{R}$.

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số f xác định trên K.

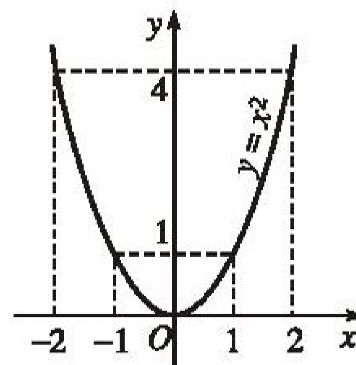
*Hàm số f gọi là **đồng biến** (hay **tăng**) trên K nếu*

$$\forall\, x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\ ;$$

*Hàm số f gọi là **nghịch biến** (hay **giảm**) trên K nếu*

$$\forall\, x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

• Trong ví dụ 3, ta thấy hàm số $y = x^2$ nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty\ ;\ 0]$ và đồng biến trên nửa khoảng $[0\ ;\ +\infty)$. Qua đồ thị của nó (h. 2.2) ta thấy : Từ trái sang phải, nhánh trái của parabol (ứng với $x \in (-\infty\ ;\ 0]$) là đường cong đi xuống, thể hiện sự nghịch biến của hàm số ; nhánh phải của parabol (ứng với $x \in [0\ ;\ +\infty)$) là đường cong đi lên, thể hiện sự đồng biến của hàm số.



Hình 2.2

Tổng quát, ta có :

Nếu một hàm số đồng biến trên K thì trên đó, đồ thị của nó đi lên ;

Nếu một hàm số nghịch biến trên K thì trên đó, đồ thị của nó đi xuống.

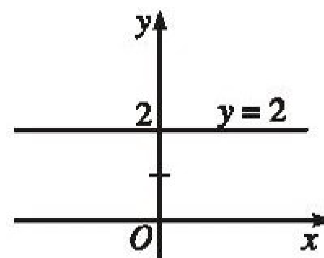
(Khi nói đồ thị đi lên hay đi xuống, ta luôn kể theo chiều tăng của đối số, nghĩa là kể từ trái sang phải).

H3 *Hàm số cho bởi đồ thị trên hình 2.1 đồng biến trên khoảng nào, nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng* $(-3\ ;\ -1)$, $(-1\ ;\ 2)$ *và* $(2\ ;\ 8)$ *?*

CHÚ Ý

Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ với mọi x_1 và x_2 thuộc K, tức là $f(x) = c$ với mọi $x \in K$ (c là hằng số) thì ta có ***hàm số không đổi*** (còn gọi là ***hàm số hằng***) trên K.

Chẳng hạn, $y = 2$ là một hàm số không đổi xác định trên $\mathbb{R}$. Nó có đồ thị là đường thẳng song song với trục Ox (h.2.3).



Hình 2.3

b) **Khảo sát sự biến thiên của hàm số**

> ***Khảo sát sự biến thiên của hàm số*** *là xét xem hàm số đồng biến, nghịch biến, không đổi trên các khoảng (nửa khoảng hay đoạn) nào trong tập xác định của nó.*

• Đối với hàm số cho bằng biểu thức, để khảo sát sự đồng biến hay nghịch biến của hàm số đó trên một khoảng (nửa khoảng hay đoạn) K , ta có thể dựa vào định nghĩa (xem ví dụ 3), hoặc dựa vào nhận xét sau :

Điều kiện "$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$" có nghĩa là $x_2 - x_1$ và $f(x_2) - f(x_1)$ cùng dấu. Do đó

Hàm số f đồng biến trên **K** *khi và chỉ khi*

$$\forall x_1, x_2 \in K \text{ và } x_1 \neq x_2, \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$$

Hàm số f nghịch biến trên **K** *khi và chỉ khi*

$$\forall x_1, x_2 \in K \text{ và } x_1 \neq x_2, \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0.$$

Như vậy, để khảo sát sự biến thiên của hàm số f trên K, ta có thể xét dấu của tỉ số $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ trên K.

Ví dụ 4. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x) = ax^2$ (với $a > 0$) trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(0 ; +\infty)$.

Giải. Với hai số x_1 và x_2 khác nhau, ta có

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1),$$

suy ra $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1).$$

Do $a > 0$ nên :

– Nếu $x_1 < 0$ và $x_2 < 0$ thì $a(x_2 + x_1) < 0$; điều đó chứng tỏ hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$;

– Nếu $x_1 > 0$ và $x_2 > 0$ thì $a(x_2 + x_1) > 0$; điều đó chứng tỏ hàm số đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$. □

• Người ta thường ghi lại kết quả khảo sát sự biến thiên của một hàm số bằng cách lập *bảng biến thiên* của nó. Hàm số trong ví dụ 4 có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = ax^2$ $(a > 0)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Trong bảng biến thiên, mũi tên đi lên thể hiện tính đồng biến, mũi tên đi xuống thể hiện tính nghịch biến của hàm số.

Cụ thể hơn, hàng thứ hai trong bảng được hiểu như sau : $f(0) = 0$ và khi x tăng trên khoảng $(0 ; +\infty)$ thì $f(x)$ nhận mọi giá trị trong khoảng $(0 ; +\infty)$ theo chiều tăng, còn khi x tăng trong khoảng $(-\infty ; 0)$ thì $f(x)$ cũng nhận mọi giá trị trong khoảng $(0 ; +\infty)$ nhưng theo chiều giảm.

H4 *Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x) = ax^2$ (với $a < 0$) trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(0 ; +\infty)$ và lập bảng biến thiên của nó.*

3. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Có những hàm số có một số tính chất đặc biệt, dễ nhận thấy mà ta có thể lợi dụng để việc khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của nó đơn giản và dễ dàng hơn. Tính chất *chẵn - lẻ* của hàm số là một ví dụ.

a) Khái niệm hàm số chẵn, hàm số lẻ

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathscr{D}$.

*Hàm số f gọi là hàm số **chẵn** nếu với mọi x thuộc $\mathscr{D}$, ta có $-x$ cũng thuộc $\mathscr{D}$ và $f(-x) = f(x)$.*

*Hàm số f gọi là hàm số **lẻ** nếu với mọi x thuộc $\mathscr{D}$, ta có $-x$ cũng thuộc $\mathscr{D}$ và $f(-x) = -f(x)$.*

Ví dụ 5. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ là hàm số lẻ.

Giải. Tập xác định của hàm số là đoạn $[-1 ; 1]$ nên dễ thấy

$$\forall x, x \in [-1 ; 1] \Rightarrow -x \in [-1 ; 1] \quad \text{và}$$

$$f(-x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = -(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = -f(x).$$

Vậy f là hàm số lẻ. □

H5 *Chứng minh rằng hàm số* $g(x) = ax^2$ $(a \neq 0)$ *là hàm số chẵn.*

b) Đồ thị của hàm số chẵn và hàm số lẻ

Giả sử hàm số f với tập xác định $\mathscr{D}$ là hàm số chẵn và có đồ thị (G). Với mỗi điểm $M(x_0 ; y_0)$ sao cho $x_0 \in \mathscr{D}$, ta xét điểm đối xứng với nó qua trục tung là $M'(-x_0 ; y_0)$.

Từ định nghĩa hàm số chẵn, ta có $-x_0 \in \mathscr{D}$ và $f(-x_0) = f(x_0)$. Do đó

$$M \in (G) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow y_0 = f(-x_0) \Leftrightarrow M' \in (G).$$

Điều đó chứng tỏ (G) có trục đối xứng là trục tung.

Nếu f là hàm số lẻ thì lí luận tương tự, ta suy ra (G) có tâm đối xứng là gốc toạ độ O.

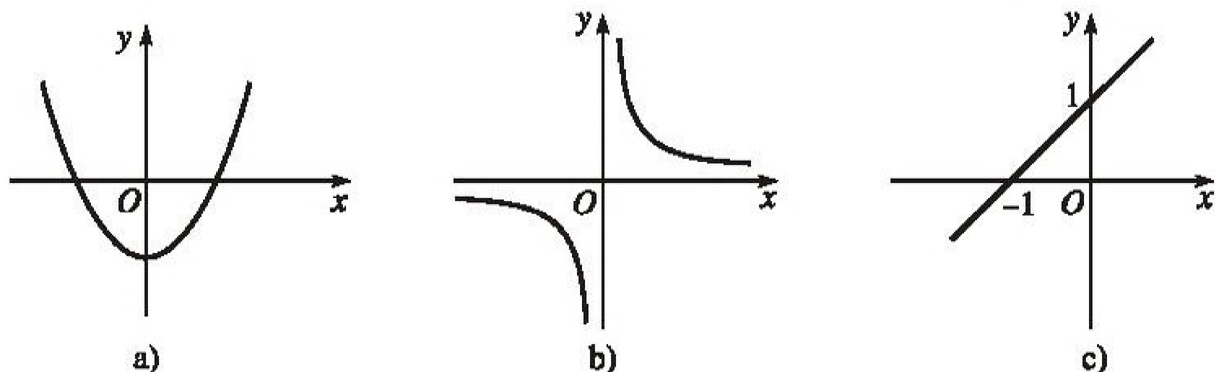
Vậy ta đã chứng minh được định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

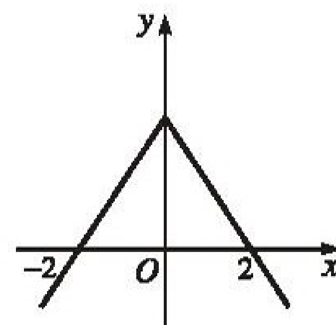
Hình 2.4a cho hình ảnh đồ thị của một hàm số chẵn. Hình 2.4b cho hình ảnh đồ thị của một hàm số lẻ. Tuy nhiên, có nhiều hàm số không chẵn và không lẻ. Chẳng hạn, hàm số $y = x + 1$ (h.2.4.c) không chẵn và không lẻ.



Hình 2.4

H6 *Cho hàm số f xác định trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$ có đồ thị như trên hình 2.5. Hãy ghép mỗi ý ở cột trái dưới đây với một ý ở cột phải để được một mệnh đề đúng.*

1) Hàm số f là *2) Hàm số f đồng biến* *3) Hàm số f nghịch biến*	*a) Hàm số chẵn* *b) Hàm số lẻ* *c) Trên khoảng $(-\infty ; 0)$* *d) Trên khoảng $(0 ; +\infty)$* *e) Trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$*



Hình 2.5

4. Sơ lược về tịnh tiến đồ thị song song với trục toạ độ

a) Tịnh tiến một điểm

Trong mặt phẳng toạ độ, xét điểm $M_0(x_0 ; y_0)$. Với số $k > 0$ đã cho, ta có thể dịch chuyển điểm M_0 :

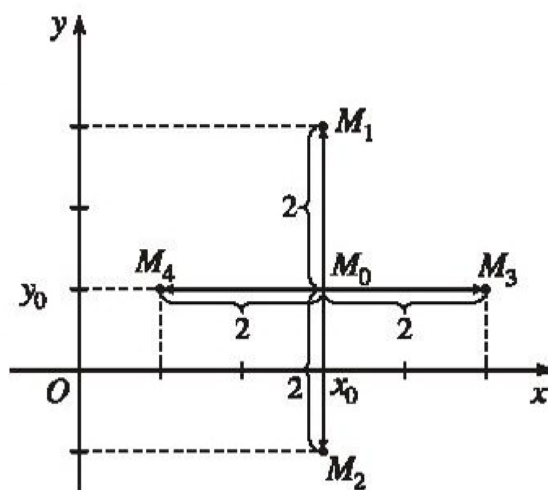
– Lên trên hoặc xuống dưới (theo phương của trục tung) k đơn vị ;

– Sang trái hoặc sang phải (theo phương của trục hoành) k đơn vị.

Khi dịch chuyển điểm M_0 như thế, ta còn nói rằng ***tịnh tiến điểm M_0 song song với trục toạ độ.***

H7 *Giả sử M_1, M_2, M_3 và M_4 là các điểm có được khi tịnh tiến điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ theo thứ tự lên trên, xuống dưới, sang phải và sang trái 2 đơn vị (h.2.6).*

Hãy cho biết toạ độ của các điểm M_1, M_2, M_3 và M_4.



Hình 2.6

b) Tịnh tiến một đồ thị

Cho số $k > 0$. Nếu ta tịnh tiến tất cả các điểm của đồ thị (G) lên trên k đơn vị thì tập hợp các điểm thu được tạo thành hình (G_1). Điều đó được phát biểu là :

Tịnh tiến đồ thị (G) lên trên k đơn vị thì được hình (G_1), hoặc

Hình (G_1) có được khi tịnh tiến đồ thị (G) lên trên k đơn vị.

Ta cũng phát biểu tương tự khi tịnh tiến (*G*) xuống dưới, sang trái hay sang phải.

Vấn đề là : Nếu (*G*) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ thì (G_1) có là đồ thị của một hàm số không ? Nếu có thì (G_1) là đồ thị của hàm số nào ?

Định lí sau đây sẽ trả lời câu hỏi đó (ta thừa nhận định lí này).

ĐỊNH LÍ

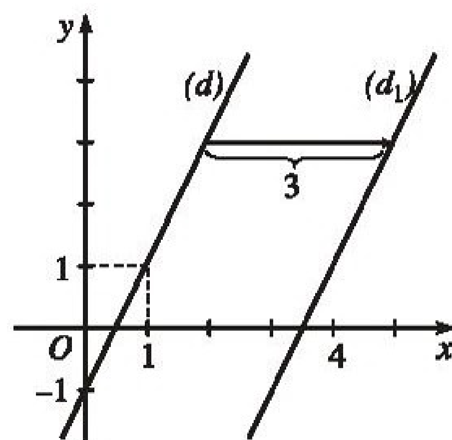
> *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đồ thị (G) của hàm số $y = f(x)$; p và q là hai số dương tuỳ ý. Khi đó :*
>
> *1) Tịnh tiến (G) lên trên q đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) + q$;*
>
> *2) Tịnh tiến (G) xuống dưới q đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) - q$;*
>
> *3) Tịnh tiến (G) sang trái p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x + p)$;*
>
> *4) Tịnh tiến (G) sang phải p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x - p)$.*

Ví dụ 6. Nếu tịnh tiến đường thẳng (*d*) : $y = 2x - 1$ sang phải 3 đơn vị thì ta được đồ thị của hàm số nào ?

Giải. Kí hiệu $f(x) = 2x - 1$. Theo định lí trên, khi tịnh tiến (*d*) sang phải 3 đơn vị, ta được (d_1), đó là đồ thị của hàm số

$$y = f(x - 3) = 2(x - 3) - 1,$$

tức là hàm số $y = 2x - 7$ (h.2.7). □



Hình 2.7

Ví dụ 7. Cho đồ thị (H) của hàm số $y = \dfrac{1}{x}$. Hỏi muốn có đồ thị của hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x}$ thì ta phải tịnh tiến (H) như thế nào ?

Giải. Kí hiệu $g(x) = \dfrac{1}{x}$, ta có $\dfrac{-2x+1}{x} = -2 + \dfrac{1}{x} = g(x) - 2$. Vậy muốn có đồ thị của hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x}$, ta phải tịnh tiến (H) xuống dưới 2 đơn vị. □

H8 *Hãy chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho sau đây :*

Khi tịnh tiến parabol $y = 2x^2$ sang trái 3 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số :

(A) $y = 2(x+3)^2$; (B) $y = 2x^2 + 3$; (C) $y = 2(x-3)^2$; (D) $y = 2x^2 - 3$.

Câu hỏi và bài tập

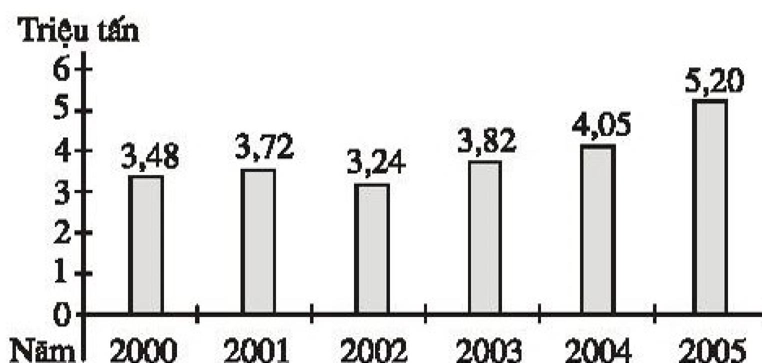
Hàm số

1. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

a) $y = \dfrac{3x+5}{x^2 - x + 1}$; b) $y = \dfrac{x-2}{x^2 - 3x + 2}$;

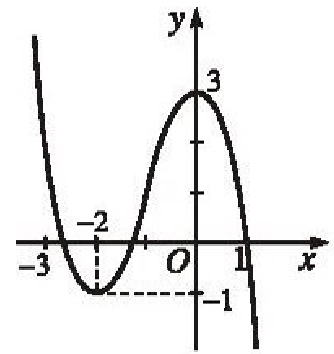
c) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$; d) $y = \dfrac{x^2 - 2}{(x+2)\sqrt{x+1}}$.

2. Biểu đồ hình 2.8 cho biết số triệu tấn gạo xuất khẩu của Việt Nam trong các năm từ 2000 đến 2005. Biểu đồ này cho ta một hàm số. Hãy cho biết tập xác định và nêu một vài giá trị của hàm số đó.



Hình 2.8

Sự biến thiên của hàm số



Hình 2.9

3. Hình 2.9 là đồ thị của một hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$. Dựa vào đồ thị, hãy lập bảng biến thiên của hàm số đó.

4. Khảo sát sự biến thiên của mỗi hàm số sau và lập bảng biến thiên của nó :

a) $y = x^2 + 2x - 2$ trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(-1 ; +\infty)$;

b) $y = -2x^2 + 4x + 1$ trên mỗi khoảng $(-\infty ; 1)$ và $(1 ; +\infty)$;

c) $y = \dfrac{2}{x-3}$ trên mỗi khoảng $(-\infty ; 3)$ và $(3 ; +\infty)$.

Hàm số chẵn, hàm số lẻ

5. Mỗi hàm số sau là hàm số chẵn hay hàm số lẻ ?

a) $y = x^4 - 3x^2 + 1$;

b) $y = -2x^3 + x$;

c) $y = |x + 2| - |x - 2|$;

d) $y = |2x + 1| + |2x - 1|$.

Tịnh tiến đồ thị

6. Cho đường thẳng $(d) : y = 0{,}5x$. Hỏi ta sẽ được đồ thị của hàm số nào khi tịnh tiến (d) :

a) Lên trên 3 đơn vị ?

b) Xuống dưới 1 đơn vị ?

c) Sang phải 2 đơn vị ?

d) Sang trái 6 đơn vị ?

Luyện tập

7. Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực dương với căn bậc hai của nó có phải là một hàm số không ? Vì sao ?

8. Giả sử (G) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$ và A là một điểm trên trục hoành có hoành độ bằng a. Từ A, ta dựng đường thẳng (d) song song (hoặc trùng) với trục tung.

a) Khi nào thì (d) có điểm chung với (G) ? (*Hướng dẫn*. Xét hai trường hợp a thuộc $\mathcal{D}$ và a không thuộc $\mathcal{D}$) ;

b) (d) có thể có bao nhiêu điểm chung với (G) ? Vì sao ?

c) Đường tròn có thể là đồ thị của hàm số nào không ? Vì sao ?

9. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

a) $y = \dfrac{3x+1}{x^2-9}$;

b) $y = \dfrac{x}{1-x^2} - \sqrt{-x}$;

c) $y = \dfrac{x - 3\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$;

d) $y = \dfrac{\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}$.

10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -2(x-2) & \text{nếu } -1 \le x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{nếu } x \ge 1. \end{cases}$

a) Cho biết tập xác định của hàm số f.

b) Tính $f(-1), f(0,5), f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), f(1), f(2)$.

11. Trong các điểm $A(-2\ ;\ 8)$, $B(4\ ;\ 12)$, $C(2\ ;\ 8)$, $D(5\ ;\ 25 + \sqrt{2})$, điểm nào thuộc, điểm nào không thuộc đồ thị của hàm số $f(x) = x^2 + \sqrt{x-3}$? Vì sao ?

12. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{1}{x-2}$ trên mỗi khoảng $(-\infty\ ;\ 2)$ và $(2\ ;\ +\infty)$;

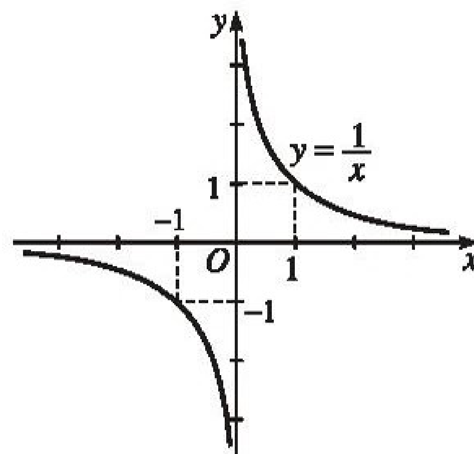
b) $y = x^2 - 6x + 5$ trên mỗi khoảng $(-\infty\ ;\ 3)$ và $(3\ ;\ +\infty)$;

c) $y = x^{2005} + 1$ trên khoảng $(-\infty\ ;\ +\infty)$.

13. Hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ có đồ thị như hình 2.10.

a) Dựa vào đồ thị, hãy lập bảng biến thiên của hàm số đó.

b) Bằng tính toán, hãy khảo sát sự biến thiên của hàm số trên mỗi khoảng $(-\infty\ ;\ 0)$ và $(0\ ;\ +\infty)$ và kiểm tra lại kết quả so với bảng biến thiên đã lập.



Hình 2.10

14. Tập con S của tập số thực $\mathbb{R}$ gọi là *đối xứng* nếu với mọi x thuộc S, ta đều có $-x$ thuộc S. Em có nhận xét gì về tập xác định của một hàm số chẵn (lẻ) ? Từ nhận xét đó, em có kết luận gì về tính chẵn - lẻ của hàm số $y = \sqrt{x}$? Tại sao ?

15. Gọi (d) là đường thẳng $y = 2x$ và (d') là đường thẳng $y = 2x - 3$. Ta có thể coi (d') có được là do tịnh tiến (d) :

a) Lên trên hay xuống dưới bao nhiêu đơn vị ?

b) Sang trái hay sang phải bao nhiêu đơn vị ?

16. Cho đồ thị (H) của hàm số $y = -\dfrac{2}{x}$.

a) Tịnh tiến (H) lên trên 1 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào ?

b) Tịnh tiến (H) sang trái 3 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào ?

c) Tịnh tiến (H) lên trên 1 đơn vị, sau đó tịnh tiến đồ thị nhận được sang trái 3 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào ?

Bài đọc thêm

ÁNH XẠ

Ánh xạ là một khái niệm rất quan trọng. Cũng như tập hợp, khái niệm ánh xạ có mặt trong tất cả các lĩnh vực toán học. Khái niệm hàm số thực chất cũng chỉ là một trường hợp riêng của khái niệm ánh xạ mà thôi.

1. Định nghĩa

Cho hai tập hợp tuỳ ý khác rỗng X và Y.

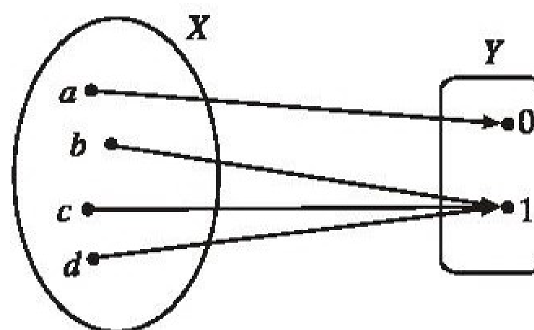
• *Một **ánh xạ** f từ X đến Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử x của X với một và chỉ một phần tử xác định của Y. Phần tử xác định ấy gọi là ảnh của x qua ánh xạ f, và kí hiệu là $f(x)$.*

• Tập hợp X gọi là ***tập nguồn***, tập hợp Y gọi là ***tập đích*** của ánh xạ.

Ánh xạ f từ X đến Y được viết là $f : X \to Y$

$$x \mapsto f(x).$$

Ví dụ 1. Cho $X = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\}$ và $Y = \{0\ ;\ 1\}$. Gọi f là quy tắc cho ở hình bên. Ta có ánh xạ



$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ a &\mapsto 0 \\ b &\mapsto 1 \\ c &\mapsto 1 \\ d &\mapsto 1. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Cho X là tập hợp các lớp học của một trường phổ thông, Y là tập hợp các giáo viên của trường đó và f là quy tắc đặt tương ứng mỗi lớp học với giáo viên chủ nhiệm lớp đó. Ta có ánh xạ $f : X \to Y$. □

Ví dụ 3. Cho X là tập hợp các học sinh của một trường học, Y là tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ và f là quy tắc đặt tương ứng mỗi học sinh với số đo chiều cao (tính bằng xentimet) của học sinh đó. Khi đó, f là một ánh xạ từ X đến Y. □

2. Chú ý

1) Nếu cho ánh xạ $f : X \to Y$ thì :

– Mỗi phần tử $x \in X$ đều phải có ảnh của nó trong Y và ảnh đó là duy nhất ;

– Mỗi phần tử thuộc Y có thể là ảnh của một hay nhiều phần tử của X, nhưng cũng có thể không là ảnh của phần tử nào cả.

2) Trường hợp $X \subset \mathbb{R}$ và $Y = \mathbb{R}$ thì mỗi ánh xạ từ X đến Y là một hàm số xác định trên X.

§ 2 HÀM SỐ BẬC NHẤT

1. Nhắc lại về hàm số bậc nhất

• Ta đã biết : ***Hàm số bậc nhất*** *là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax + b$, trong đó a và b là những hằng số với $a \neq 0$.*

Hàm số bậc nhất có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Khi $a > 0$, hàm số $y = ax + b$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi $a < 0$, hàm số $y = ax + b$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$y = ax + b$ ($a > 0$)	$-\infty$ ↗ $+\infty$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$y = ax + b$ ($a < 0$)	$+\infty$ ↘ $-\infty$

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng gọi là đường thẳng $y = ax + b$. Nó có *hệ số góc* bằng a và có đặc điểm sau :

– Không song song và không trùng với các trục toạ độ ;

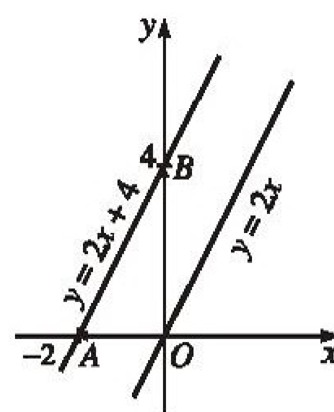
– Cắt trục tung tại điểm $B(0 ; b)$ và cắt trục hoành tại điểm $A(-\frac{b}{a} ; 0)$.

Ví dụ 1. Đồ thị của hàm số $y = 2x + 4$ là đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2 ; 0)$ và $B(0 ; 4)$.

Từ đẳng thức $2x + 4 = 2(x + 2)$ dễ suy ra rằng đường thẳng $y = 2x + 4$ có thể thu được từ đường thẳng $(d) : y = 2x$ bằng một trong hai cách sau (h. 2.11) :

– Tịnh tiến (d) lên trên 4 đơn vị ;

– Tịnh tiến (d) sang trái 2 đơn vị. □



Hình 2.11

• Cho hai đường thẳng $(d) : y = ax + b$ và $(d') : y = a'x + b'$, ta có :

(d) song song với $(d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$;

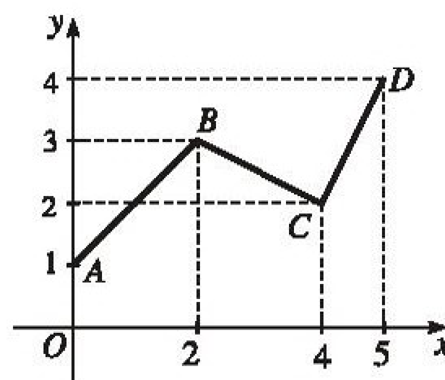
(d) trùng với $(d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$;

(d) cắt $(d') \Leftrightarrow a \neq a'$.

2. Hàm số $y = |ax + b|$

a) Hàm số bậc nhất trên từng khoảng

Xét hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } 0 \leq x < 2 \\ -\frac{1}{2}x + 4 & \text{nếu } 2 \leq x \leq 4 \\ 2x - 6 & \text{nếu } 4 < x \leq 5. \end{cases}$



Hình 2.12

Rõ ràng, hàm số trên không phải là hàm số bậc nhất. Nó là sự "lắp ghép" của ba hàm số bậc nhất khác nhau. Hàm số này là một ví dụ về *hàm số bậc nhất trên từng khoảng*.

Muốn vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất trên từng khoảng, ta vẽ đồ thị của từng hàm số tạo thành. Chẳng hạn, đồ thị của hàm số nêu trên là đường gấp khúc $ABCD$ (h.2.12), trong đó :

AB là phần đường thẳng $y = x + 1$ ứng với $0 \le x < 2$;

BC là phần đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 4$ ứng với $2 \le x \le 4$;

CD là phần đường thẳng $y = 2x - 6$ ứng với $4 < x \le 5$.

H1 *Cho biết tập xác định, lập bảng biến thiên của hàm số nói trên và tìm giá trị lớn nhất của nó.*

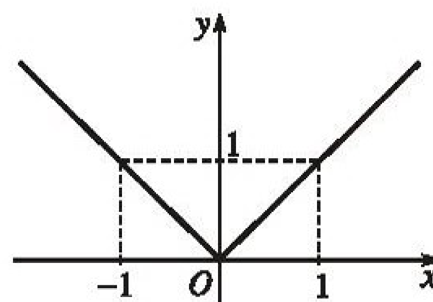
b) Đồ thị và sự biến thiên của hàm số $y = |ax + b|$ với $a \neq 0$

Sau đây, ta sẽ tìm hiểu tính chất của các hàm số dạng $y = |ax + b|$ thông qua đồ thị của nó. Hàm số $y = |ax + b|$ về thực chất cũng là hàm số bậc nhất trên từng khoảng.

Ví dụ 2. Xét hàm số $y = |x|$.

Dễ thấy hàm số $y = |x|$ xác định với mọi x và là một hàm số chẵn. Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta có

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \ge 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$



Hình 2.13

Do đó, đồ thị của hàm số này là sự "lắp ghép" của hai đồ thị : đồ thị của hàm số $y = x$ (chỉ lấy phần ứng với $x \ge 0$) và đồ thị của hàm số $y = -x$ (chỉ lấy phần ứng với $x < 0$). Đó là hai tia phân giác của hai góc phần tư I và II (h.2.13). Dễ thấy chúng đối xứng với nhau qua Oy. □

H2 *Dựa vào đồ thị, hãy lập bảng biến thiên của hàm số $y = |x|$ và tìm giá trị nhỏ nhất của nó.*

Ví dụ 3. Xét hàm số $y = |2x - 4|$.

Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta có :

– Nếu $2x - 4 \geq 0$, tức là $x \geq 2$ thì $|2x - 4| = 2x - 4$;

– Nếu $2x - 4 < 0$, tức là $x < 2$ thì $|2x - 4| = -(2x - 4) = -2x + 4$.

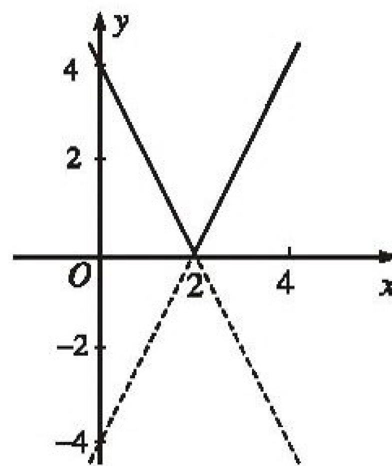
Do đó, hàm số đã cho có thể viết là

$$y = \begin{cases} 2x - 4 \text{ nếu } x \geq 2 \\ -2x + 4 \text{ nếu } x < 2. \end{cases}$$ □

H3 *Hãy nêu cách vẽ đồ thị của hàm số cho trong ví dụ 3 rồi lập bảng biến thiên của nó.*

CHÚ Ý

Qua hai ví dụ trên đây, ta thấy có thể vẽ đồ thị của hàm số $y = |ax + b|$ bằng một cách khác đơn giản hơn như sau : Vẽ hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = -ax - b$ rồi xoá đi hai phần đường thẳng nằm ở phía dưới trục hoành. (Hình 2.14 là đồ thị của hàm số cho trong ví dụ 3).



Hình 2.14

Câu hỏi và bài tập

Hàm số bậc nhất

17. Tìm các cặp đường thẳng song song trong các đường thẳng sau :

a) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$;   b) $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 3$;

c) $y = \frac{2}{\sqrt{2}}x + 2$;   d) $y = \sqrt{2}x - 2$;

e) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 1$;   g) $y = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - 1\right)$.

Hàm số $y = |ax + b|$

18. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{nếu } -2 \le x < -1 \\ -2x & \text{nếu } -1 \le x \le 1 \\ x - 3 & \text{nếu } 1 < x \le 3. \end{cases}$

a) Tìm tập xác định và vẽ đồ thị của hàm số đó.

b) Cho biết sự biến thiên của hàm số đã cho trên mỗi khoảng $(-2 ; -1)$, $(-1 ; 1)$ và $(1 ; 3)$ và lập bảng biến thiên của nó.

19. a) Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = f_1(x) = 2|x|$ và $y = f_2(x) = |2x + 5|$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Cho biết phép tịnh tiến biến đồ thị hàm số f_1 thành đồ thị hàm số f_2.

Bài đọc thêm

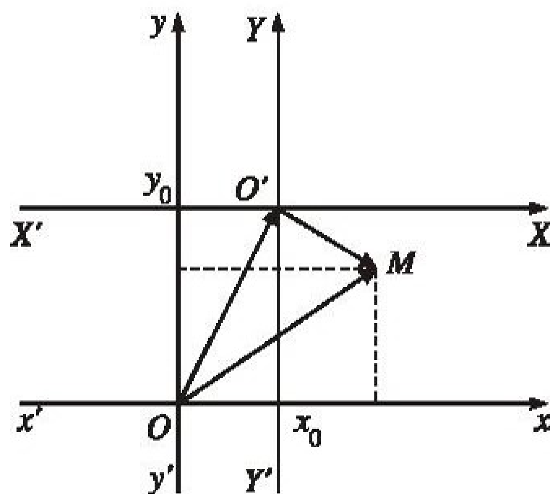
PHÉP TỊNH TIẾN HỆ TOẠ ĐỘ

Ta biết rằng đồ thị của một hàm số bao giờ cũng gắn với một hệ toạ độ nhất định. Ví dụ, đồ thị của hàm số $y = x$ là đường phân giác (d) của góc phần tư I và III trong hệ toạ độ Oxy. Ta hãy xét một hệ toạ độ mới $O'XY$, trong đó gốc O' của nó, đối với hệ toạ độ Oxy, có toạ độ $(x_0 ; y_0)$; các trục $X'X$ và $Y'Y$ song song cùng hướng và cùng đơn vị theo thứ tự với trục $x'x$ và $y'y$ (h.2.15). Câu hỏi đặt ra là trong hệ toạ độ mới ấy, liệu (d) có còn là đồ thị của hàm số $Y = X$ nữa hay không ? Nếu không thì nó sẽ là đồ thị của hàm số nào ?

Có thể thấy rằng : Nếu $O' \notin (d)$, có nghĩa là (d) không đi qua gốc toạ độ mới thì (d) không thể là đồ thị của hàm số $Y = X$. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát, muốn biết (d) là đồ thị của hàm số nào, ta cần tìm hiểu mối quan hệ giữa các toạ độ cũ và mới của mỗi điểm trong mặt phẳng.

Gọi M là một điểm tuỳ ý. Đối với hệ toạ độ Oxy, M có toạ độ là $(x ; y)$. Đối với hệ toạ độ $O'XY$, toạ độ của M là $(X ; Y)$. Ta cần tìm mối quan hệ giữa $(x ; y)$ và $(X ; Y)$. Để ý

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}.$$



Hình 2.15

Về toạ độ, từ đẳng thức vectơ ở trên, ta có

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0. \end{cases} \qquad (*)$$

Đó là *công thức đổi toạ độ* bởi phép tịnh tiến hệ toạ độ theo vectơ $\overrightarrow{OO'}$.

Giả sử (G) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đối với hệ toạ độ Oxy. Muốn biết (G) là đồ thị của hàm số nào đối với hệ toạ độ $O'XY$, ta phải tìm quan hệ giữa X và Y. Muốn vậy, thay thế x và y trong hệ thức $y = f(x)$ bởi công thức (*), ta có

$$Y + y_0 = f(X + x_0) \text{ hay } Y = f(X + x_0) - y_0.$$

Vậy đối với hệ toạ độ $O'XY$, (G) là đồ thị của hàm số $Y = f(X + x_0) - y_0$.

Luyện tập

20. Có phải mỗi đường thẳng trong mặt phẳng toạ độ đều là đồ thị của một hàm số nào đó không ? Vì sao ?

21. a) Tìm hàm số $y = f(x)$, biết rằng đồ thị của nó là đường thẳng đi qua điểm $(-2 ; 5)$ và có hệ số góc bằng $-1,5$;

b) Vẽ đồ thị của hàm số tìm được.

22. Tìm bốn hàm số bậc nhất có đồ thị là bốn đường thẳng đôi một cắt nhau tại bốn đỉnh của một hình vuông nhận gốc O làm tâm đối xứng, biết rằng một đỉnh của hình vuông này là $A(3 ; 0)$.

23. Gọi (G) là đồ thị của hàm số $y = 2|x|$.

a) Khi tịnh tiến (G) lên trên 3 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào ?

b) Khi tịnh tiến (G) sang trái 1 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào ?

c) Khi tịnh tiến liên tiếp (G) sang phải 2 đơn vị, rồi xuống dưới 1 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào ?

24. Vẽ đồ thị của hai hàm số sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ và nêu nhận xét về quan hệ giữa chúng :

a) $y = |x - 2|$; b) $y = |x| - 3$.

25. Một hãng taxi quy định giá thuê xe đi mỗi kilômét là 6 nghìn đồng đối với 10 km đầu tiên và 2,5 nghìn đồng đối với các kilômét tiếp theo. Một hành khách thuê taxi đi quãng đường x kilômét phải trả số tiền là y nghìn đồng. Khi đó, y là một hàm số của đối số x, xác định với mọi $x \geq 0$.

a) Hãy biểu diễn y như một hàm số bậc nhất trên từng khoảng ứng với đoạn $[0 ; 10]$ và khoảng $(10 ; +\infty)$.

b) Tính $f(8), f(10)$ và $f(18)$.

c) Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và lập bảng biến thiên của nó.

26. Cho hàm số $y = 3|x - 1| - |2x + 2|$.

a) Bằng cách bỏ dấu giá trị tuyệt đối, hãy viết hàm số đã cho dưới dạng hàm số bậc nhất trên từng khoảng. (*Hướng dẫn*. Xét các khoảng hay đoạn $(-\infty ; -1)$, $[-1 ; 1)$ và $[1 ; +\infty)$).

b) Vẽ đồ thị rồi lập bảng biến thiên của hàm số đã cho.

§ 3 HÀM SỐ BẬC HAI

1. Định nghĩa

> ***Hàm số bậc hai*** *là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng* $y = ax^2 + bx + c$*, trong đó* a, b, c *là những hằng số với* $a \neq 0$*.*

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ mà chúng ta đã học ở lớp dưới là một trường hợp riêng của hàm số bậc hai và có đồ thị là một parabol.

Trong bài này, chúng ta sẽ thấy rằng : Nếu tịnh tiến parabol $y = ax^2$ một cách thích hợp thì ta sẽ được đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$. Do đó, đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ cũng gọi là một parabol.

2. Đồ thị của hàm số bậc hai

a) Nhắc lại về đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

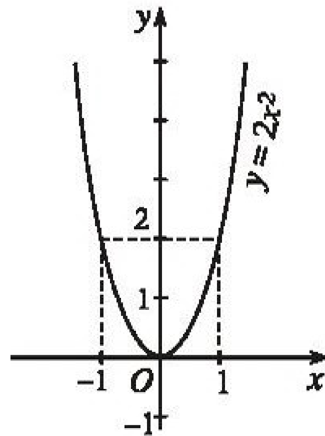
Ta đã biết, đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là parabol (P_0) có các đặc điểm sau :

1) Đỉnh của parabol (P_0) là gốc toạ độ O ;

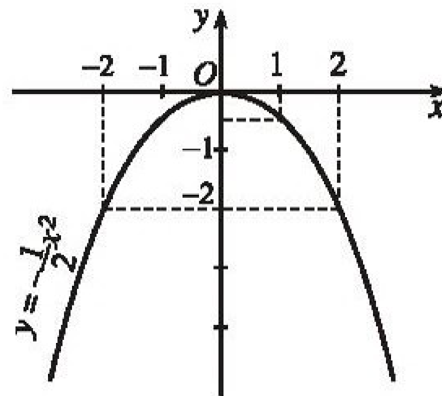
2) Parabol (P_0) có trục đối xứng là trục tung ;

3) Parabol (P_0) hướng bề lõm lên trên khi $a > 0$ và xuống dưới khi $a < 0$.

Chẳng hạn, hình 2.16 là parabol $y = 2x^2$, hình 2.17 là parabol $y = -\dfrac{1}{2}x^2$.



Hình 2.16



Hình 2.17

b) Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Ta đã biết

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

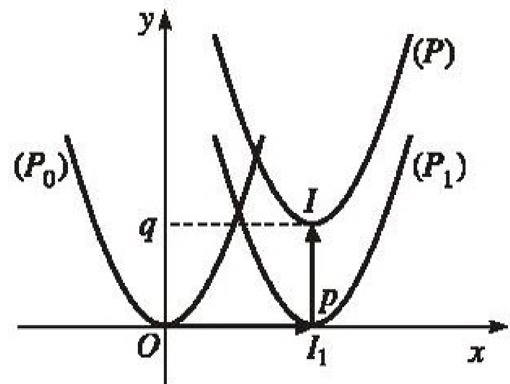
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Do đó, nếu đặt

$$\Delta = b^2 - 4ac,\ p = -\frac{b}{2a} \text{ và } q = -\frac{\Delta}{4a}$$

thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có dạng $y = a(x - p)^2 + q$.

Gọi (P_0) là parabol $y = ax^2$. Ta thực hiện hai phép tịnh tiến liên tiếp như sau :



Hình 2.18

– Tịnh tiến (P_0) sang phải p đơn vị nếu $p > 0$, sang trái $|p|$ đơn vị nếu $p < 0$, ta được đồ thị hàm số $y = a(x - p)^2$. Gọi đồ thị này là (P_1).

– Tiếp theo, tịnh tiến (P_1) lên trên q đơn vị nếu $q > 0$, xuống dưới $|q|$ đơn vị nếu $q < 0$, ta được đồ thị hàm số $y = a(x - p)^2 + q$. Gọi đồ thị này là (P). Vậy (P) là đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$.

Ta nhận thấy (P_1) và (P) đều là những hình "giống hệt" parabol (P_0) (hình 2.18 ứng với trường hợp $p > 0$, $q > 0$).

H1 *Biết rằng trong phép tịnh tiến thứ nhất, đỉnh O của (P_0) biến thành đỉnh I_1 của (P_1). Từ đó, hãy cho biết toạ độ của I_1 và phương trình trục đối xứng của (P_1).*

H2 *Trong phép tịnh tiến thứ hai, đỉnh I_1 của (P_1) biến thành đỉnh I của (P). Tìm toạ độ của I và phương trình trục đối xứng của (P).*

Kết luận

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ là một parabol có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên khi $a > 0$, xuống dưới khi $a < 0$.

Trên đây, ta đã biết đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ cũng là một parabol "giống" như parabol $y = ax^2$, chỉ khác nhau về vị trí trong mặt phẳng toạ độ. Do đó trong thực hành, ta thường *vẽ trực tiếp* parabol $y = ax^2 + bx + c$ mà không cần vẽ parabol $y = ax^2$. Cụ thể, ta làm như sau :

– Xác định đỉnh của parabol ;

– Xác định trục đối xứng và hướng bề lõm của parabol ;

– Xác định một số điểm cụ thể của parabol (chẳng hạn, giao điểm của parabol với các trục toạ độ và các điểm đối xứng với chúng qua trục đối xứng) ;

– Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để "nối" các điểm đó lại.

3. Sự biến thiên của hàm số bậc hai

Từ đồ thị của hàm số bậc hai, ta suy ra bảng biến thiên sau đây.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$y = ax^2+bx+c$ $(a > 0)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$y = ax^2+bx+c$ $(a < 0)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

Như vậy :

Khi $a > 0$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; -\dfrac{b}{2a})$, đồng biến trên khoảng $(-\dfrac{b}{2a} ; +\infty)$ và có giá trị nhỏ nhất là $-\dfrac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Khi $a < 0$, hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty ; -\dfrac{b}{2a})$, nghịch biến trên khoảng $(-\dfrac{b}{2a} ; +\infty)$ và có giá trị lớn nhất là $-\dfrac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Ví dụ. Áp dụng kết quả trên, hãy cho biết sự biến thiên của hàm số

$$y = -x^2 + 4x - 3.$$

Vẽ đồ thị của hàm số đó.

Giải. Ta tính được $-\dfrac{b}{2a} = 2$ và $-\dfrac{\Delta}{4a} = 1$.

Vậy đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$ là parabol có đỉnh $I(2 ; 1)$, nhận đường thẳng $x = 2$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm xuống dưới.

Từ đó suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 2)$, nghịch biến trên khoảng $(2 ; +\infty)$.

Ta có bảng biến thiên :

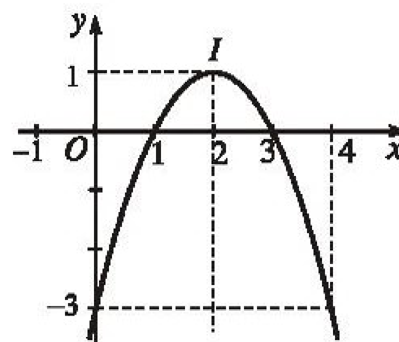
x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Bảng biến thiên này cho thấy hàm số có giá trị lớn nhất là 1 khi $x = 2$.

Để vẽ đồ thị, ta lập bảng toạ độ của một số điểm thuộc đồ thị như sau

x	0	1	2	3	4
y	-3	0	1	0	-3

"Nối" các điểm đó lại, ta được parabol $y = -x^2 + 4x - 3$ như hình 2.19.

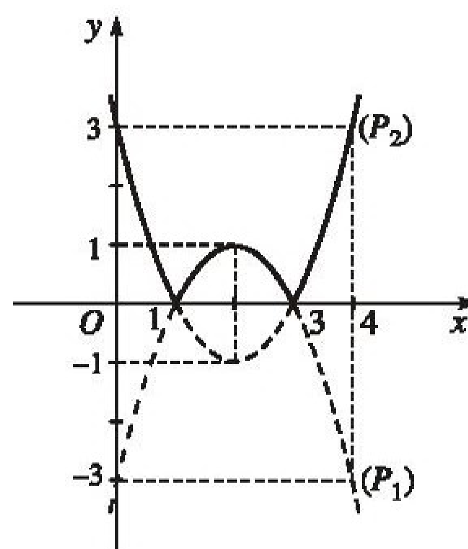


Hình 2.19

Nhận xét. Ta cũng có thể vẽ đồ thị của hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$ tương tự như cách vẽ đồ thị của hàm số $y = |ax + b|$.

Chẳng hạn, để vẽ đồ thị hàm số $y = |-x^2 + 4x - 3|$, ta lần lượt làm như sau (h.2.20) :

- Vẽ parabol (P_1) : $y = -x^2 + 4x - 3$;
- Vẽ parabol (P_2) : $y = -(-x^2 + 4x - 3)$ bằng cách lấy đối xứng (P_1) qua trục Ox.
- Xoá đi các điểm của (P_1) và (P_2) nằm ở phía dưới trục hoành.



Hình 2.20

H3 *Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ có đồ thị là parabol (P).*

a) Tìm toạ độ đỉnh, phương trình trục đối xứng và hướng bề lõm của (P). Từ đó suy ra sự biến thiên của hàm số $y = x^2 + 2x - 3$.

b) Vẽ parabol (P).

c) Vẽ đồ thị của hàm số $y = |x^2 + 2x - 3|$.

Câu hỏi và bài tập

27. Cho các hàm số :

a) $y = -x^2 - 3$;

b) $y = (x - 3)^2$;

c) $y = \sqrt{2}\,x^2 + 1$;

d) $y = -\sqrt{2}\,(x + 1)^2$.

Không vẽ đồ thị, hãy mô tả đồ thị của mỗi hàm số trên bằng cách điền vào chỗ trống (...) theo mẫu :

– Đỉnh của parabol là điểm có toạ độ ...

– Parabol có trục đối xứng là đường thẳng ...

– Parabol có bề lõm hướng (lên trên / xuống dưới) ...

28. Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = ax^2 + c$. Tìm a và c trong mỗi trường hợp sau :

a) y nhận giá trị bằng 3 khi $x = 2$, và có giá trị nhỏ nhất là -1 ;

b) Đỉnh của parabol (P) là $I(0 ; 3)$ và một trong hai giao điểm của (P) với trục hoành là $A(-2 ; 0)$.

29. Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = a(x - m)^2$. Tìm a và m trong mỗi trường hợp sau :

a) Parabol (P) có đỉnh là $I(-3 ; 0)$ và cắt trục tung tại điểm $M(0 ; -5)$;

b) Đường thẳng $y = 4$ cắt (P) tại hai điểm $A(-1 ; 4)$ và $B(3 ; 4)$.

30. Viết mỗi hàm số cho sau đây thành dạng $y = a(x - p)^2 + q$. Từ đó hãy cho biết đồ thị của nó có thể được suy ra từ đồ thị của hàm số nào nhờ các phép tịnh tiến đồ thị song song với các trục toạ độ. Hãy mô tả cụ thể các phép tịnh tiến đó :

a) $y = x^2 - 8x + 12$; b) $y = -3x^2 - 12x + 9$.

31. Hàm số $y = -2x^2 - 4x + 6$ có đồ thị là parabol (P).

a) Tìm toạ độ đỉnh và phương trình trục đối xứng của (P).

b) Vẽ parabol (P).

c) Dựa vào đồ thị, hãy cho biết tập hợp các giá trị của x sao cho $y \geq 0$.

Luyện tập

32. Với mỗi hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ và $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$, hãy

a) Vẽ đồ thị của hàm số ;

b) Tìm tập hợp các giá trị x sao cho $y > 0$;

c) Tìm tập hợp các giá trị của x sao cho $y < 0$.

33. Lập bảng theo mẫu sau đây rồi điền vào ô trống các giá trị thích hợp (nếu có).

Hàm số	Hàm số có giá trị lớn nhất / nhỏ nhất khi x = ?	Giá trị lớn nhất	Giá trị nhỏ nhất
$y = 3x^2 - 6x + 7$			
$y = -5x^2 - 5x + 3$			
$y = x^2 - 6x + 9$			
$y = -4x^2 + 4x - 1$			

34. Gọi (P) là đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$. Hãy xác định dấu của hệ số a và biệt số Δ trong mỗi trường hợp sau :

a) (P) nằm hoàn toàn ở phía trên trục hoành ;

b) (P) nằm hoàn toàn ở phía dưới trục hoành ;

c) (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và đỉnh của (P) nằm phía trên trục hoành.

35. Vẽ đồ thị rồi lập bảng biến thiên của mỗi hàm số sau :

a) $y = \left|x^2 + \sqrt{2}x\right|$; b) $y = -x^2 + 2|x| + 3$;

c) $y = 0{,}5x^2 - |x - 1| + 1$.

36. Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau :

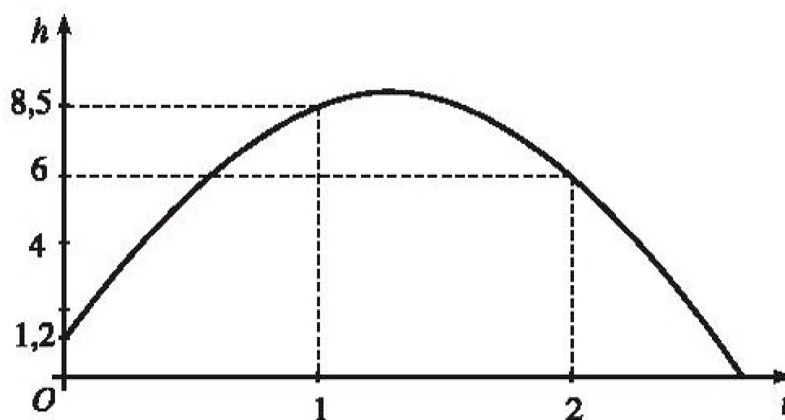
a) $y = \begin{cases} -x + 1 & \text{nếu } x \le -1 \\ -x^2 + 3 & \text{nếu } x > -1 \text{ ;} \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+3)^2 & \text{nếu } x \le -1, \\ 2 & \text{nếu } x > -1. \end{cases}$

37. *Bài toán bóng đá*

Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oth, trong đó t là thời gian (tính bằng giây), kể từ khi quả bóng được đá lên ; h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ độ cao 1,2 m. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao 8,5 m và 2 giây sau khi đá lên, nó ở độ cao 6 m (h.2.21).

a) Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống trên.

b) Xác định độ cao lớn nhất của quả bóng (tính chính xác đến hàng phần nghìn).



Hình 2.21

c) Sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên (tính chính xác đến hàng phần trăm) ?

38. *Bài toán về cổng Ac-xơ (Arch)*

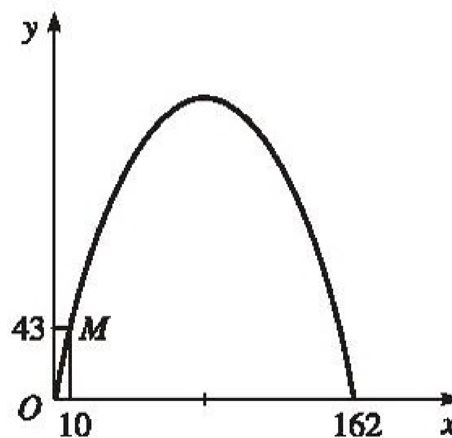
Khi du lịch đến thành phố Xanh Lu-i (Mĩ), ta sẽ thấy một cái cổng lớn có hình parabol hướng bề lõm xuống dưới, đó là cổng Ac-xơ. Giả sử ta lập một hệ toạ độ Oxy sao cho một chân cổng đi qua gốc O như trên hình 2.22 (x và y tính bằng mét), chân kia của cổng ở vị trí (162 ; 0). Biết một điểm M trên cổng có toạ độ là (10 ; 43).

a) Tìm hàm số bậc hai có đồ thị chứa cung parabol nói trên.

b) Tính chiều cao của cổng (tính từ điểm cao nhất trên cổng xuống mặt đất, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Cổng Ac-xơ ở Mĩ



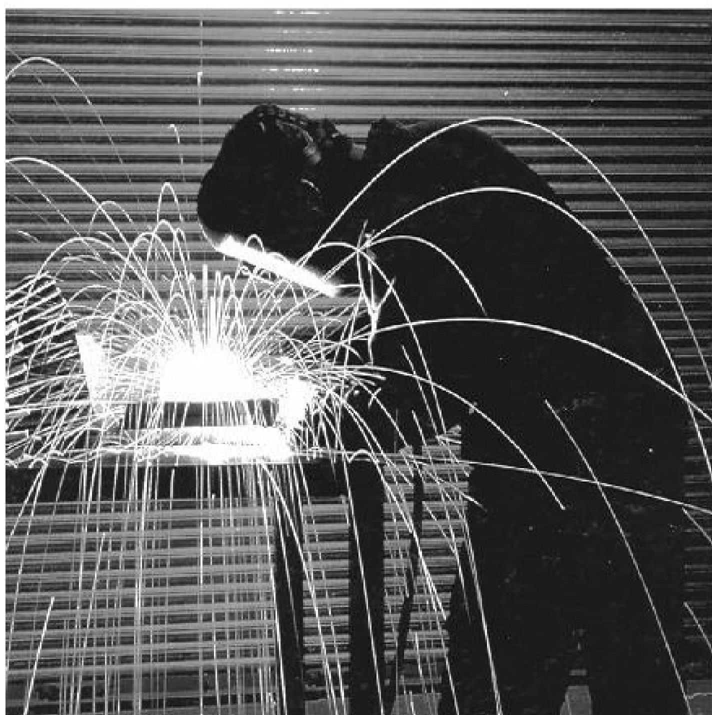
Hình 2.22



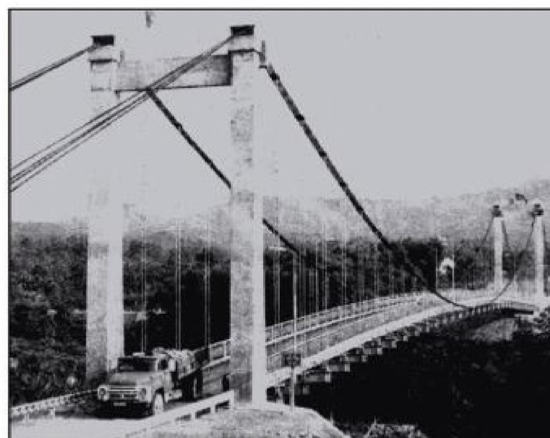
MỘT SỐ HÌNH ẢNH ĐƯỜNG PARABOL TRONG THỰC TẾ

Parabol là một đường cong đơn giản nhưng rất đẹp. Bởi vậy, chúng ta có thể thấy nó xuất hiện trong nhiều công trình kiến trúc ở Việt Nam và trên thế giới.

Ngoài ra, parabol còn có nhiều tính chất lí thú mà chúng ta sẽ nghiên cứu trong Hình học.



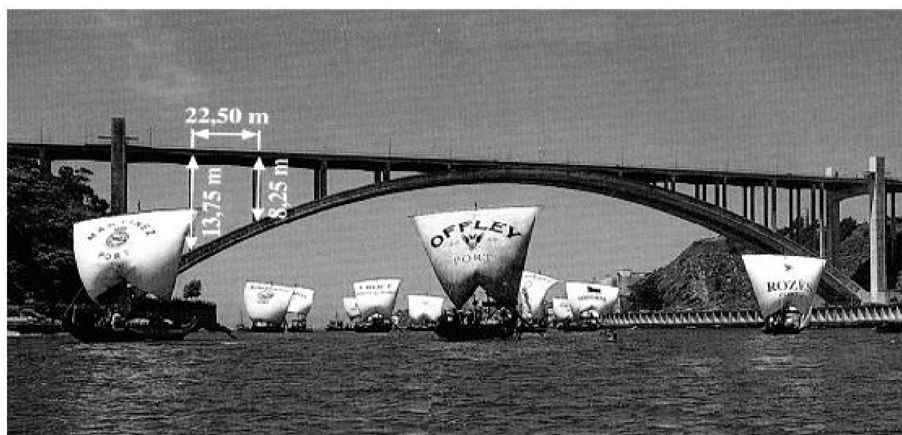
Thợ hàn.



Cầu treo Bình Thành trên tuyến quốc lộ 19 nối thành phố Huế với huyện miền núi A-lưới. Ảnh VNTTX.



Bể phun nước ở Tuần Châu, tỉnh Quảng Ninh.



Cầu A-ra-bi-đa ở Poóc-tô Bồ Đào Nha.

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương II

39. Với mỗi câu hỏi sau đây, hãy chọn phần kết luận mà em cho là đúng.

a) Trên khoảng $(-1\ ;\ 1)$, hàm số $y = -2x + 5$

(A) Đồng biến ; (B) Nghịch biến ; (C) Cả hai kết luận (A) và (B) đều sai.

b) Trên khoảng $(0\ ;\ 1)$, hàm số $y = x^2 + 2x - 3$

(A) Đồng biến ; (B) Nghịch biến ; (C) Cả hai kết luận (A) và (B) đều sai.

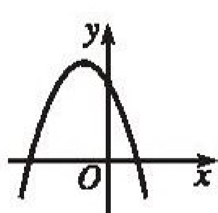
c) Trên khoảng $(-2\ ;\ 1)$, hàm số $y = x^2 + 2x - 3$

(A) Đồng biến ; (B) Nghịch biến ; (C) Cả hai kết luận (A) và (B) đều sai.

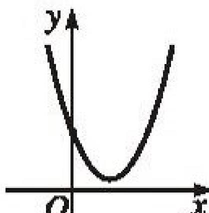
40. a) Tìm điều kiện của a và b, sao cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$ là hàm số lẻ.

b) Tìm điều kiện của a, b và c, sao cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ là hàm số chẵn.

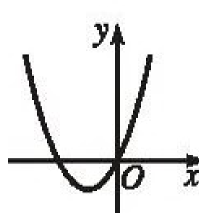
41. Dựa vào vị trí đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$, hãy xác định dấu của các hệ số a, b, c trong mỗi trường hợp dưới đây (h.2.23) :



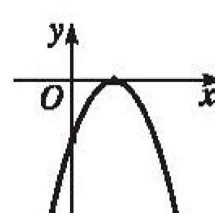
a)



b)



c)



d)

Hình 2.23

42. Trong mỗi trường hợp cho dưới đây, hãy vẽ đồ thị của các hàm số trên cùng một mặt phẳng toạ độ rồi xác định toạ độ giao điểm của chúng :

a) $y = x - 1$ và $y = x^2 - 2x - 1$;

b) $y = -x + 3$ và $y = -x^2 - 4x + 1$;

c) $y = 2x - 5$ và $y = x^2 - 4x - 1$.

43. Xác định các hệ số a, b và c để cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$ và nhận giá trị bằng 1 khi $x = 1$. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đó.

44. Vẽ đồ thị của các hàm số sau rồi lập bảng biến thiên của nó :

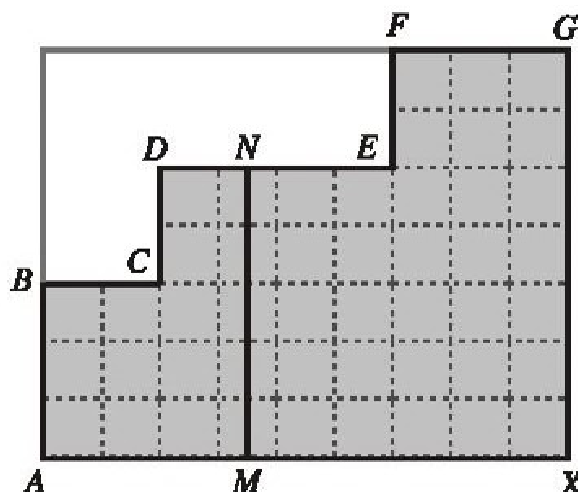
a) $y = \left|\frac{3}{2}x - 2\right|$;

b) $y = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x < 0 \\ x^2 - x & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$;

c) $y = \left|\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}\right|$;

d) $y = x|x| - 2x - 1$.

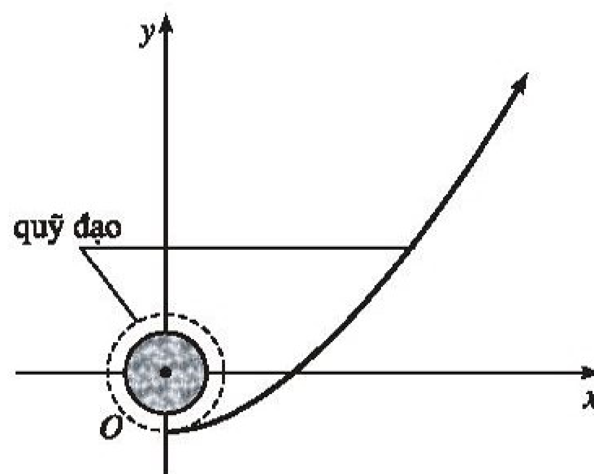
45. Trên hình 2.24, điểm M chuyển động trên đoạn thẳng AX. Từ M, kẻ đường thẳng song song với AB, cắt một trong ba đoạn thẳng BC, DE, FG tại điểm N. Gọi S là diện tích của miền tô đậm nằm ở bên trái MN. Gọi độ dài đoạn AM là x ($0 \leq x \leq 9$). Khi đó, S là một hàm số của x. Hãy nêu biểu thức xác định hàm số $S(x)$.



Hình 2.24

46. *Bài toán tàu vũ trụ*

Khi một con tàu vũ trụ được phóng lên Mặt Trăng, trước hết nó bay vòng quanh Trái Đất. Sau đó, đến một thời điểm thích hợp, động cơ bắt đầu hoạt động đưa con tàu bay theo quỹ đạo là một nhánh parabol lên Mặt Trăng (trong hệ toạ độ Oxy như trên hình 2.25, x và y tính bằng nghìn kilômét). Biết rằng khi động cơ bắt đầu hoạt động, tức là khi $x = 0$ thì $y = -7$. Sau đó, $y = -4$ khi $x = 10$ và $y = 5$ khi $x = 20$.



Hình 2.25

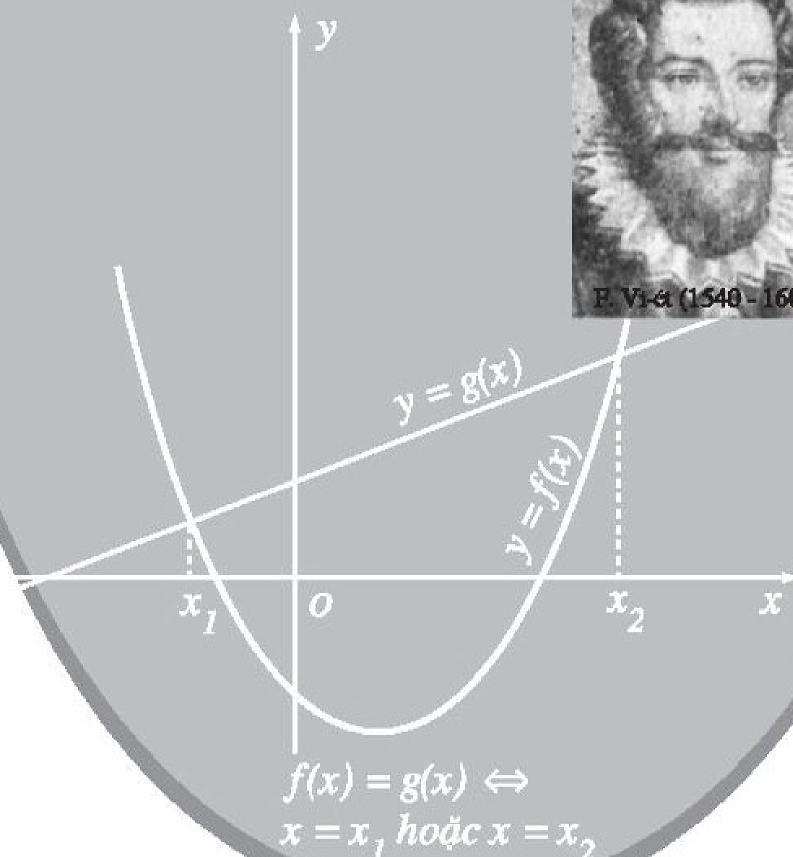
a) Tìm hàm số bậc hai có đồ thị chứa nhánh parabol nói trên.

b) Theo lịch trình, để đến được Mặt Trăng, con tàu phải đi qua điểm (100 ; y) với $y = 294 \pm 1{,}5$. Hỏi điều kiện đó có được thoả mãn hay không ?

Chương 3 PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH



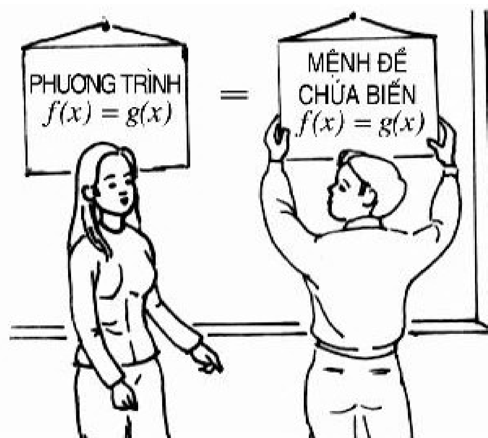
F. Vi-ét (1540 - 1603)



Từ thuở xa xưa, trong lịch sử phát triển của toán học, phương trình đã là vấn đề trung tâm của đại số học. Trong Đại số 10 nâng cao, các vấn đề về **phương trình và hệ phương trình bậc nhất và bậc hai** cũng là một nội dung trọng tâm của chương trình. Chúng được trình bày chính xác hơn, đầy đủ hơn, hệ thống hơn so với lớp dưới. Trong đó, điều đáng lưu ý và tương đối khó là vấn đề giải và biện luận phương trình. Bởi vậy, chương này đòi hỏi những kĩ năng thành thạo trong việc giải các phương trình và hệ phương trình bậc nhất và bậc hai trên cơ sở các phương pháp cơ bản mà sách giáo khoa đã cung cấp.

§ 1 ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

Ở lớp dưới, ta đã làm quen với khái niệm phương trình, chẳng hạn, $2x - 1 = \sqrt{x}$ là một phương trình. Để có một cách hiểu mới, ta xem "$2x - 1 = \sqrt{x}$" là một mệnh đề chứa biến. Giá trị của biến x làm cho mệnh đề đó đúng chính là nghiệm của phương trình. Sau đây, chúng ta sẽ định nghĩa phương trình theo quan điểm đó.



1. Khái niệm phương trình một ẩn

ĐỊNH NGHĨA

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là $\mathcal{D}_f$ và $\mathcal{D}_g$. Đặt $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.

Mệnh đề chứa biến "$f(x) = g(x)$" được gọi là ***phương trình*** *một ẩn ; x gọi là* ***ẩn số*** *(hay* ***ẩn****) và $\mathcal{D}$ gọi là* ***tập xác định*** *của phương trình.*

Số $x_0 \in \mathcal{D}$ gọi là một ***nghiệm*** *của phương trình $f(x) = g(x)$ nếu "$f(x_0) = g(x_0)$" là mệnh đề đúng.*

CHÚ Ý 1

Để thuận tiện trong thực hành, ta không cần viết rõ tập xác định $\mathcal{D}$ của phương trình mà chỉ cần nêu điều kiện để $x \in \mathcal{D}$. Điều kiện đó gọi là *điều kiện xác định của phương trình*, gọi tắt là ***điều kiện của phương trình***.

Để đơn giản, ta coi *các hàm số được nói đến trong bài này đều được cho bằng biểu thức*. Vậy theo quy ước về tập xác định của hàm số cho bởi biểu thức, điều kiện của phương trình bao gồm các điều kiện để giá trị của $f(x)$ và $g(x)$ cùng được xác định và các điều kiện khác của ẩn (nếu có yêu cầu).

Ví dụ 1

a) Điều kiện của phương trình $\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1} = 3$ là $x^3 - 2x^2 + 1 \geq 0$.

b) Khi tìm nghiệm nguyên của phương trình $2 - \frac{1}{x} = \sqrt{x}$, ta hiểu điều kiện của phương trình là $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$ và $x \geq 0$ (hay x nguyên dương). □

CHÚ Ý 2

1) Khi giải một phương trình (tức là tìm tập nghiệm của phương trình), nhiều khi ta chỉ cần, hoặc chỉ có thể tính giá trị gần đúng của nghiệm (với độ chính xác nào đó). Giá trị đó gọi là *nghiệm gần đúng* của phương trình.

Chẳng hạn, bằng máy tính bỏ túi, ta tính nghiệm gần đúng (chính xác đến hàng phần nghìn) của phương trình $x^3 = 7$ là $x \approx 1{,}913$.

2) Các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là hoành độ các giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

2. Phương trình tương đương

Ta đã biết : Hai phương trình (cùng ẩn) được gọi là *tương đương* nếu chúng có cùng một tập nghiệm. Nếu phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ tương đương với phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ thì ta viết

$$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x).$$

H1 *Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai ?*

a) $\sqrt{x-1} = 2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x - 1 = 0.$

b) $x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow x = 1.$

c) $|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1.$

• Khi muốn nhấn mạnh hai phương trình có cùng tập xác định $\mathcal{D}$ (hay có cùng điều kiện xác định mà ta cũng kí hiệu là $\mathcal{D}$) và tương đương với nhau, ta nói

– Hai phương trình tương đương với nhau *trên* $\mathcal{D}$, hoặc

– *Với điều kiện* $\mathcal{D}$, hai phương trình tương đương với nhau.

Chẳng hạn với $x > 0$, hai phương trình $x^2 = 1$ và $x = 1$ tương đương với nhau.

• Trong các phép biến đổi phương trình, đáng chú ý nhất là các phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình. Ta gọi chúng là các ***phép biến đổi tương đương***. Như vậy

> *Phép biến đổi tương đương biến một phương trình thành phương trình tương đương với nó.*

Chẳng hạn, việc thực hiện các phép biến đổi đồng nhất ở mỗi vế của một phương trình và không thay đổi tập xác định của nó là một phép biến đổi tương đương.

Dưới đây là định lí về một số phép biến đổi tương đương thường dùng.

ĐỊNH LÍ 1

> *Cho phương trình $f(x) = g(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$; $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên $\mathcal{D}$* ($h(x)$ có thể là một hằng số). *Khi đó trên $\mathcal{D}$, phương trình đã cho tương đương với mỗi phương trình sau :*
>
> 1) $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$;
>
> 2) $f(x)\,h(x) = g(x)\,h(x)$ *nếu* $h(x) \neq 0$ *với mọi* $x \in \mathcal{D}$.

Chứng minh. Ta chứng minh cho kết luận thứ nhất. Kết luận thứ hai được chứng minh tương tự.

Thật vậy, cả ba hàm số f, g, và h đều xác định trên $\mathcal{D}$ nên nếu x_0 thuộc $\mathcal{D}$ thì $f(x_0)$, $g(x_0)$ và $h(x_0)$ là những số xác định. Do đó, áp dụng tính chất của đẳng thức số, ta có :

$$f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) + h(x_0) = g(x_0) + h(x_0).$$

Điều đó chứng tỏ rằng nếu x_0 là nghiệm của phương trình này thì cũng là nghiệm của phương trình kia và ngược lại. Vậy hai phương trình $f(x) = g(x)$ và $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ tương đương với nhau. □

Từ định lí trên, ta dễ thấy : Hai quy tắc biến đổi phương trình đã học ở lớp dưới (quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân với một số khác 0) là những phép biến đổi tương đương.

H2 *Mỗi khẳng định sau đúng hay sai ?*

a) Cho phương trình $3x + \sqrt{x-2} = x^2$. *Chuyển* $\sqrt{x-2}$ *sang vế phải thì được phương trình tương đương.*

b) Cho phương trình $3x+\sqrt{x-2} = x^2+\sqrt{x-2}$*. Lược bỏ* $\sqrt{x-2}$ *ở cả hai vế của phương trình thì được phương trình tương đương.*

3. Phương trình hệ quả

Ví dụ 2. Xét phương trình

$$\sqrt{x} = 2 - x. \qquad (1)$$

Bình phương hai vế, ta được phương trình mới

$$x = 4 - 4x + x^2. \qquad (2)$$

Tập nghiệm của (1) là $S_1 = \{1\}$, của (2) là $S_2 = \{1 ; 4\}$. Hai phương trình (1) và (2) không tương đương. Tuy nhiên, ta thấy $S_2 \supset S_1$; trong trường hợp này, ta nói (2) là *phương trình hệ quả* của phương trình (1). □

Tổng quát,

> *$f_1(x) = g_1(x)$ gọi là **phương trình hệ quả** của phương trình $f(x) = g(x)$ nếu tập nghiệm của nó chứa tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.*

Khi đó, ta viết

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x).$$

Từ định nghĩa này, ta suy ra : Nếu hai phương trình tương đương thì mỗi phương trình đều là hệ quả của phương trình còn lại.

Trong ví dụ 2, giá trị $x = 4$ là nghiệm của (2) nhưng không là nghiệm của (1). Ta gọi 4 là *nghiệm ngoại lai* của phương trình (1).

H3 *Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai ?*

a) $\sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x - 2 = 1.$

b) $\dfrac{x(x-1)}{x-1} = 1 \Rightarrow x = 1.$

Trong các phép biến đổi dẫn đến phương trình hệ quả, ta thường sử dụng phép biến đổi được nêu trong định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 2

> *Khi bình phương hai vế của một phương trình, ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho.*
>
> $$f(x) = g(x) \Rightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2.$$

CHÚ Ý

1) Có thể chứng minh được rằng : Nếu hai vế của một phương trình *luôn cùng dấu* thì khi bình phương hai vế của nó, ta được phương trình tương đương.

2) Nếu phép biến đổi một phương trình dẫn đến phương trình hệ quả thì sau khi giải phương trình hệ quả, ta phải *thử lại* các nghiệm tìm được vào phương trình đã cho để phát hiện và loại bỏ nghiệm ngoại lai.

Ví dụ 3. Giải phương trình $|x - 1| = x - 3$.

Giải. Bình phương hai vế, ta được phương trình hệ quả

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 6x + 9.$$

Giải phương trình này, ta được $x = 2$. Thử lại, ta thấy 2 không phải là nghiệm của phương trình đã cho. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. □

4. Phương trình nhiều ẩn

Trong thực tế, ta còn gặp những phương trình có nhiều hơn một ẩn. Đó là các phương trình dạng $F = G$, trong đó F và G là những biểu thức của nhiều biến. Chẳng hạn,

$$2x^2 + 4xy - y^2 = -x + 2y + 3 \quad (3)$$

là một *phương trình hai ẩn* (x và y) ;

$$x + y + z = 3xyz \quad (4)$$

là một *phương trình ba ẩn* (x, y và z).

Nếu phương trình hai ẩn x và y trở thành mệnh đề đúng khi $x = x_0$ và $y = y_0$ (với x_0 và y_0 là số) thì ta gọi ***cặp số*** $(x_0 ; y_0)$ là ***một nghiệm*** của nó. Chẳng hạn, cặp số (1 ; 0) là một nghiệm của phương trình (3).

Khái niệm *nghiệm* của phương trình ba ẩn, bốn ẩn,... cũng được hiểu tương tự. Chẳng hạn, bộ ba số (1 ; 1 ; 1) là một nghiệm của phương trình (4).

Đối với phương trình nhiều ẩn, các khái niệm tập xác định (điều kiện xác định), tập nghiệm, phương trình tương đương, phương trình hệ quả,... cũng tương tự như đối với phương trình một ẩn.

5. Phương trình chứa tham số

Chúng ta còn xét cả những phương trình, trong đó ngoài các ẩn còn có những chữ khác. Các chữ này được xem là những số đã biết và được gọi là ***tham số***.

Chẳng hạn, phương trình $m(x + 2) = 3mx - 1$ (với ẩn x) là một *phương trình chứa tham số m*.

H4 *Tìm tập nghiệm của phương trình $mx + 2 = 1 - m$ (với m là tham số) trong mỗi trường hợp : a) $m = 0$; b) $m \neq 0$.*

Rõ ràng nghiệm và tập nghiệm của một phương trình chứa tham số phụ thuộc vào tham số đó. Khi giải phương trình chứa tham số, ta phải chỉ ra tập nghiệm của phương trình tuỳ theo các giá trị có thể của tham số. Để nhấn mạnh ý đó, khi giải phương trình chứa tham số, ta thường nói là ***giải và biện luận phương trình***.

Câu hỏi và bài tập

1. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau rồi suy ra tập nghiệm của nó :

a) $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$;

b) $3x - \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + 6$;

c) $\dfrac{\sqrt{3-x}}{x-3} = x + \sqrt{x-3}$;

d) $x + \sqrt{x-1} = \sqrt{-x}$.

2. Giải các phương trình sau :

a) $x + \sqrt{x-1} = 2 + \sqrt{x-1}$;

b) $x + \sqrt{x-1} = 0{,}5 + \sqrt{x-1}$;

c) $\dfrac{x}{2\sqrt{x-5}} = \dfrac{3}{\sqrt{x-5}}$;

d) $\dfrac{x}{2\sqrt{x-5}} = \dfrac{2}{\sqrt{x-5}}$.

3. Giải các phương trình sau :

a) $x + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{2x-1}{x-1}$;

b) $x + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{2x-3}{x-2}$;

c) $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0$;

d) $(x^2 - x - 2)\sqrt{x+1} = 0$.

4. Giải các phương trình sau bằng cách bình phương hai vế của phương trình :

a) $\sqrt{x-3} = \sqrt{9-2x}$;

b) $\sqrt{x-1} = x - 3$;

c) $2|x - 1| = x + 2$;

d) $|x - 2| = 2x - 1$.

§ 2 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI MỘT ẨN

Ta đã biết cách giải :

– *Phương trình bậc nhất* (ẩn x) là phương trình có dạng $ax + b = 0$ (a và b là hai số đã cho với $a \neq 0$) ;

– *Phương trình bậc hai* (ẩn x) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b và c là ba số đã cho với $a \neq 0$) ; $\Delta = b^2 - 4ac$ gọi là *biệt thức*, $\Delta' = b'^2 - ac$ (với $b = 2b'$) gọi là *biệt thức thu gọn* của phương trình bậc hai.

Trong bài này, chúng ta sẽ nghiên cứu cách giải và biện luận các phương trình bậc nhất và bậc hai có chứa tham số.

1. Giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$

Kết quả giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$ được nêu trong bảng sau đây.

1) $a \neq 0$	: Phương trình có một nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.
2) $a = 0$ và $b \neq 0$	: Phương trình vô nghiệm.
3) $a = 0$ và $b = 0$	: Phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m

$$m^2x + 2 = x + 2m. \quad (1)$$

Giải. Ta biến đổi tương đương

$$(1) \Leftrightarrow m^2x - x = 2m - 2$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 2(m - 1). \quad (1a)$$

Xét các trường hợp sau đây.

1) Khi $m \neq \pm 1$ (tức là $m \neq 1$ và $m \neq -1$), ta có $m^2 - 1 \neq 0$ nên (1a) có nghiệm

$$x = \frac{2(m-1)}{m^2-1} = \frac{2}{m+1}.$$

Đó là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

2) Khi $m = 1$, phương trình (1a) trở thành $0x = 0$; phương trình này nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên phương trình (1) cũng nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

3) Khi $m = -1$, phương trình (1a) trở thành $0x = -4$; phương trình này vô nghiệm nên phương trình (1) cũng vô nghiệm.

Kết luận

$m \neq \pm 1$: (1) có nghiệm $x = \dfrac{2}{m+1}$ $\left(\text{tập nghiệm là } S = \left\{\dfrac{2}{m+1}\right\}\right)$.

$m = -1$: (1) vô nghiệm (tập nghiệm là $S = \varnothing$).

$m = 1$: (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ (tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$). □

2. Giải và biện luận phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$

Kết quả giải và biện luận phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$ được nêu trong bảng sau đây.

> 1) $a = 0$: Trở về giải và biện luận phương trình $bx + c = 0$.
>
> 2) $a \neq 0$:
>
> • $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm (phân biệt)
>
> $$x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ và } x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \ ;$$
>
> • $\Delta = 0$: phương trình có một nghiệm (kép) $x = -\dfrac{b}{2a}$;
>
> • $\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm.

H1 *Trong trường hợp nào thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$:*

a) Có một nghiệm duy nhất ?

b) Vô nghiệm ?

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m

$$mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0. \qquad (2)$$

Giải. Với $m = 0$, phương trình (2) trở thành $4x - 3 = 0$; nó có nghiệm $x = \dfrac{3}{4}$.

Với $m \neq 0$, (2) là phương trình bậc hai với biệt thức thu gọn là

$$\Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = 4 - m.$$

Do đó :

– Nếu $m > 4$ thì $\Delta' < 0$ nên (2) vô nghiệm ;

– Nếu $m = 4$ thì $\Delta' = 0$ nên (2) có một nghiệm $x = \dfrac{m-2}{m} = \dfrac{1}{2}$;

– Nếu $m < 4$ và $m \neq 0$ thì $\Delta' > 0$ nên (2) có hai nghiệm

$$x = \frac{m-2-\sqrt{4-m}}{m} \quad \text{và} \quad x = \frac{m-2+\sqrt{4-m}}{m}.$$

Kết luận.

$m > 4$: (2) vô nghiệm ;

$m = 0$: (2) có nghiệm $x = \dfrac{3}{4}$;

$0 \neq m \leq 4$: (2) có hai nghiệm $x = \dfrac{m-2 \pm \sqrt{4-m}}{m}$

(hai nghiệm này trùng nhau và bằng $\dfrac{1}{2}$ khi $m = 4$).

H2 *Giải và biện luận phương trình* $(x-1)(x-mx+2) = 0$ *theo tham số* m.

Ví dụ 3. Cho phương trình

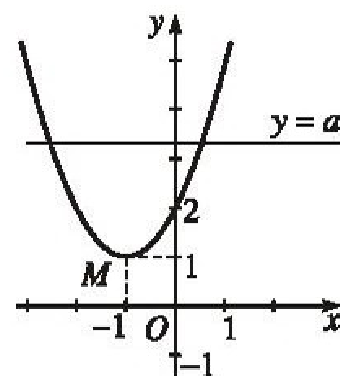
$$3x + 2 = -x^2 + x + a. \quad (3)$$

Bằng đồ thị, hãy biện luận số nghiệm của phương trình (3) tuỳ theo các giá trị của tham số a.

Giải. Trước hết, ta đưa phương trình (3) về dạng

$$x^2 + 2x + 2 = a. \quad (4)$$

Số nghiệm của phương trình (3) cũng là số nghiệm của phương trình (4) và bằng số giao điểm của parabol $(P) : y = x^2 + 2x + 2$ với đường thẳng $(d) : y = a$. Quan sát đồ thị (h.3.1), ta thấy đỉnh của parabol (P) là điểm $M(-1 ; 1)$, khi a thay đổi thì đường thẳng (d) cũng thay đổi nhưng luôn song song (hoặc trùng) với trục hoành. Từ đó, ta suy ra :



Hình 3.1

– Với $a < 1$, phương trình (3) vô nghiệm (đường thẳng (d) và parabol (P) không có điểm chung) ;

– Với $a = 1$, phương trình (3) có một nghiệm (kép) (đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P)) ;

– Với $a > 1$, phương trình (3) có hai nghiệm (đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt).

□

CHÚ Ý

Khi viết phương trình (3) dưới dạng $x^2 + 3x + 2 = x + a$, ta thấy kết quả trên còn cho biết số giao điểm của parabol $y = x^2 + 3x + 2$ với đường thẳng $y = x + a$.

3. Ứng dụng của định lí Vi-ét

• Ở lớp dưới, chúng ta đã học định lí Vi-ét đối với phương trình bậc hai.

> Hai số x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai
> $$ax^2 + bx + c = 0$$
> khi và chỉ khi chúng thoả mãn các hệ thức
> $$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Định lí Vi-ét có nhiều ứng dụng quan trọng, chẳng hạn như :

1) *Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai* ;

2) *Phân tích đa thức thành nhân tử :*

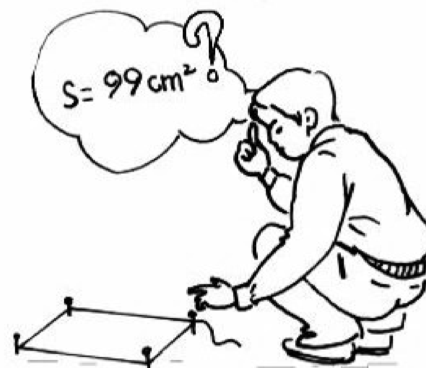
Nếu đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1 và *x_2 thì nó có thể phân tích thành nhân tử $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$* (xem bài tập 9) ;

3) *Tìm hai số biết tổng và tích của chúng :*

Nếu hai số có tổng là S và tích là P thì chúng là các nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

H3 *Có thể khoanh một sợi dây dài 40 cm thành một hình chữ nhật có diện tích S cho trước trong mỗi trường hợp sau đây được hay không ?*

a) $S = 99$ cm^2 ; b) $S = 100$ cm^2 ; c) $S = 101$ cm^2.



• Sau đây, ta sẽ tìm hiểu một ứng dụng quan trọng khác của định lí Vi-ét là *xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai*.

Định lí Vi-ét cho phép ta nhận biết dấu các nghiệm của một phương trình bậc hai mà không cần tìm các nghiệm đó. Ta có nhận xét sau đây.

Nhận xét

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 ($x_1 \le x_2$). Đặt $S = -\dfrac{b}{a}$ và $P = \dfrac{c}{a}$. Khi đó :

– *Nếu* $P < 0$ *thì* $x_1 < 0 < x_2$ (hai nghiệm trái dấu) ;

– *Nếu* $P > 0$ *và* $S > 0$ *thì* $0 < x_1 \le x_2$ (hai nghiệm dương) ;

– *Nếu* $P > 0$ *và* $S < 0$ *thì* $x_1 \le x_2 < 0$ (hai nghiệm âm).

Ví dụ 4. Phương trình $\left(1-\sqrt{2}\right)x^2 - 2\left(1+\sqrt{2}\right)x + \sqrt{2} = 0$ có $a = 1 - \sqrt{2} < 0$ và $c = \sqrt{2} > 0$ nên $P < 0$.

Vậy phương trình đó có hai nghiệm trái dấu. □

CHÚ Ý

Trong ví dụ 4, cả hai kết luận phương trình có hai nghiệm và hai nghiệm đó trái dấu đều được suy ra từ $P < 0$.

Trường hợp $P > 0$, ta phải tính Δ (hay Δ') để xem phương trình có nghiệm hay không rồi mới tính S để xác định dấu các nghiệm.

Ví dụ 5. Xét dấu các nghiệm của phương trình sau (nếu có)

$$\left(2-\sqrt{3}\right)x^2 + 2\left(1-\sqrt{3}\right)x + 1 = 0. \qquad (*)$$

Giải. Ta có

$a = 2-\sqrt{3} > 0$ và $c = 1 > 0 \Rightarrow P > 0$;

$\Delta' = \left(1-\sqrt{3}\right)^2 - \left(2-\sqrt{3}\right) = 2-\sqrt{3} \Rightarrow \Delta' > 0$ (vậy (*) có hai nghiệm phân biệt) ;

$a = 2-\sqrt{3} > 0$ và $-b' = -\left(1-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - 1 > 0 \Rightarrow S > 0$.

Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm dương. □

H4 *Với mỗi phương trình cho trong a) và b) dưới đây, hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định đã cho.*

a) Phương trình $-0{,}5x^2 + 2{,}7x + 1{,}5 = 0$

(A) *Có hai nghiệm trái dấu ;* (B) *Có hai nghiệm dương ;*

(C) *Có hai nghiệm âm ;* (D) *Vô nghiệm.*

b) Phương trình $x^2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)x + \sqrt{6} = 0$

(A) *Có hai nghiệm trái dấu ;* (B) *Có hai nghiệm dương ;*

(C) *Có hai nghiệm âm ;* (D) *Vô nghiệm.*

• Việc xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai giúp ta xác định được số nghiệm của phương trình trùng phương.

Ta đã biết, đối với phương trình trùng phương

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \qquad (4)$$

nếu đặt $y = x^2$ $(y \geq 0)$ thì ta đi đến phương trình bậc hai đối với y

$$ay^2 + by + c = 0. \qquad (5)$$

Do đó, muốn biết số nghiệm của phương trình (4), ta chỉ cần biết số nghiệm của phương trình (5) và dấu của chúng.

H5 *Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai ?*

a) Nếu phương trình (4) có nghiệm thì phương trình (5) có nghiệm ;

b) Nếu phương trình (5) có nghiệm thì phương trình (4) có nghiệm.

Ví dụ 6. Cho phương trình

$$\sqrt{2}x^4 - 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})x^2 - \sqrt{12} = 0. \qquad (6)$$

Không giải phương trình, hãy xét xem phương trình (6) có bao nhiêu nghiệm ?

Giải. Đặt $y = x^2$ $(y \geq 0)$, ta đi đến phương trình

$$\sqrt{2}y^2 - 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})y - \sqrt{12} = 0. \qquad (7)$$

Phương trình (7) có $a = \sqrt{2} > 0$ và $c = -\sqrt{12} < 0$ nên có hai nghiệm trái dấu. Vậy phương trình (7) có một nghiệm dương duy nhất, suy ra phương trình (6) có hai nghiệm đối nhau. □

Câu hỏi và bài tập

5. Xem các bài giải sau đây và cho biết mỗi bài giải đó đúng hay sai. Vì sao ?

a) $\dfrac{(x-2)(x-1)}{\sqrt{x}-1}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{\sqrt{x}-1}(x-1)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{\sqrt{x}-1}=0$ hoặc $x-1=0$.

Ta có $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-1}=0 \Leftrightarrow x=2$; $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{1\ ;2\}$.

b) $\sqrt{x^2-2}=1-x \Leftrightarrow x^2-2=(1-x)^2 \Leftrightarrow x^2-2=1-2x+x^2$

$$\Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x=\dfrac{3}{2}$.

6. Giải và biện luận các phương trình :

a) $(m^2+2)x-2m=x-3$;

b) $m(x-m)=x+m-2$;

c) $m(x-m+3)=m(x-2)+6$;

d) $m^2(x-1)+m=x(3m-2)$.

7. Dựa vào hình 3.1 (trang 74), tìm các giá trị của a để phương trình (3) cho trong ví dụ 3 có nghiệm dương. Khi đó, hãy tìm nghiệm dương của (3).

8. Giải và biện luận các phương trình :

a) $(m-1)x^2+3x-1=0$;

b) $x^2-4x+m-3=0$.

9. a) Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm là x_1 và x_2. Chứng minh rằng ta có thể phân tích $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

b) *Áp dụng.* Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

$f(x)=-2x^2-7x+4$ và $g(x)=(\sqrt{2}+1)x^2-2(\sqrt{2}+1)x+2$.

10. Không giải phương trình $x^2-2x-15=0$, hãy tính :

a) Tổng các bình phương hai nghiệm của nó ;

b) Tổng các lập phương hai nghiệm của nó ;

c) Tổng các luỹ thừa bậc bốn hai nghiệm của nó.

Hướng dẫn. $x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2$.

11. Trong các khẳng định sau đây, có duy nhất một khẳng định đúng. Hãy chọn khẳng định đúng đó.

Phương trình $\left(\sqrt{3}-1\right)x^4+x^2+2\left(1-\sqrt{3}\right)=0$:

(A) Vô nghiệm ;

(B) Có hai nghiệm $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{33-16\sqrt{3}}-1\right)}$;

(C) Có bốn nghiệm $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{33-16\sqrt{3}}-1\right)}$ và $x=\pm\sqrt{3}$;

(D) Có hai nghiệm $x=\pm\sqrt{3}$.

Bài đọc thêm

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI BẰNG MÁY TÍNH CASIO *fx - 500MS*

Máy tính CASIO *fx - 500MS* có thể giúp ta tìm nghiệm đúng hoặc nghiệm gần đúng (với chín chữ số thập phân) của phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ với các *hệ số bằng số*.

Để giải phương trình $ax^2+bx+c=0$, trước hết ta ấn các phím [MODE] [MODE] [1] [▷] [2] để vào chương trình giải. Sau đó, ta nhập từng hệ số bằng cách ấn phím tương ứng với hệ số đó và phím [=] .

• Để giải phương trình $2x^2-5x-3=0$, ta ấn lần lượt các phím sau :

[MODE] [MODE] [1] [▷] [2] 2 [=] [(–)] 5 [=] [(–)] 3 [=]

Khi đó, kết quả là $x_1=3$. Ấn tiếp phím [=] , ta được $x_2=-0,5$.

• Để giải phương trình $9x^2-12x+4=0$, ta ấn lần lượt các phím sau :

[MODE] [MODE] [1] [▷] [2] 9 [=] [(–)] 12 [=] 4 [=]

Khi đó, kết quả là $x\approx 0,666\,666\,666$. Ấn tiếp hai phím [SHIFT] [d/c] , ta được $x=\frac{2}{3}$.

Đó là nghiệm kép của phương trình.

• Để giải phương trình $5x^2+4x+1=0$, ta ấn lần lượt các phím sau :

MODE MODE 1 ▷ 2 5 = 4 = 1 =

Khi đó, trên màn hình xuất hiện giá trị $x_1 = -0.4$ cùng với kí hiệu $R \Leftrightarrow I$ ở góc trên bên phải. Điều đó có nghĩa là phương trình đã cho không có nghiệm thực.

• Để giải phương trình $x^2+5,3x-1,46=0$, ta ấn lần lượt các phím sau :

MODE MODE 1 ▷ 2 1 = 5,3 = (−) 1,46 =

Khi đó, kết quả là $x_1 \approx 0{,}262\,473\,175$. Ấn tiếp phím =, ta được $x_2 \approx -5{,}562\,473\,176$. Đó là các nghiệm gần đúng của phương trình.

Luyện tập

12. Giải và biện luận các phương trình sau (m là tham số) :

a) $2(m+1)x - m(x-1) = 2m+3$; b) $m^2(x-1) + 3mx = (m^2+3)x - 1$;

c) $3(m+1)x + 4 = 2x + 5(m+1)$; d) $m^2x + 6 = 4x + 3m$.

13. a) Tìm các giá trị của p để phương trình $(p+1)x - (x+2) = 0$ vô nghiệm.

b) Tìm các giá trị của p để phương trình $p^2x - p = 4x - 2$ có vô số nghiệm.

14. Tính nghiệm gần đúng của các phương trình sau (chính xác đến hàng phần trăm) :

a) $x^2 - 5{,}60x + 6{,}41 = 0$; b) $\sqrt{2}\,x^2 + 4\sqrt{3}\,x - 2\sqrt{2} = 0$.

15. Tìm độ dài các cạnh của một tam giác vuông, biết rằng cạnh thứ nhất dài hơn cạnh thứ hai là 2 m, cạnh thứ hai dài hơn cạnh thứ ba là 23 m.

16. Giải và biện luận các phương trình sau (m và k là tham số) :

a) $(m-1)x^2 + 7x - 12 = 0$; b) $mx^2 - 2(m+3)x + m + 1 = 0$;

c) $[(k+1)x - 1](x-1) = 0$; d) $(mx-2)(2mx - x + 1) = 0$.

17. Biện luận số giao điểm của hai parabol $y = -x^2 - 2x + 3$ và $y = x^2 - m$ theo tham số m.

18. Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức $x_1^3 + x_2^3 = 40$.

19. Giải phương trình $x^2 + (4m+1)x + 2(m-4) = 0$, biết rằng nó có hai nghiệm và hiệu giữa nghiệm lớn và nghiệm nhỏ bằng 17.

20. Không giải phương trình, hãy xét xem mỗi phương trình trùng phương sau đây có bao nhiêu nghiệm.

a) $x^4 + 8x^2 + 12 = 0$;

b) $-1{,}5x^4 - 2{,}6x^2 + 1 = 0$;

c) $\left(1-\sqrt{2}\right)x^4 + 2x^2 + 1 - \sqrt{2} = 0$;

d) $-x^4 + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x^2 = 0$.

21. Cho phương trình $kx^2 - 2(k+1)x + k + 1 = 0$.

a) Tìm các giá trị của k để phương trình trên có ít nhất một nghiệm dương.

b) Tìm các giá trị của k để phương trình trên có một nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm nhỏ hơn 1. *Hướng dẫn*. Đặt $x = y + 1$.

§ 3 MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HOẶC BẬC HAI

1. Phương trình dạng $|ax + b| = |cx + d|$

a) *Cách giải 1*

Chúng ta đã biết $|X| = |Y| \Leftrightarrow X = \pm Y$ (với X và Y là hai số tuỳ ý). Tương tự, ta có

$$|ax+b| = |cx+d| \Leftrightarrow ax + b = \pm(cx+d).$$

Như vậy, muốn giải phương trình $|ax+b| = |cx+d|$, ta chỉ việc giải hai phương trình $ax + b = cx + d$ và $ax + b = -(cx+d)$ rồi lấy tất cả các nghiệm thu được.

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình

$$|mx - 2| = |x + m|. \qquad (1)$$

Hướng dẫn. Để giải phương trình (1), ta phải giải hai phương trình :

$$mx - 2 = x + m\ ; \qquad (1a)$$

$$mx - 2 = -(x+m). \qquad (1b)$$

Ta có (1a) $\Leftrightarrow (m-1)x = m + 2$.

Do đó, (1a) vô nghiệm khi $m = 1$ và có nghiệm $x = \dfrac{m+2}{m-1}$ khi $m \neq 1$.

Ta có (1b) $\Leftrightarrow$ $(m+1)x = -m+2$.

Do đó, (1b) vô nghiệm khi $m = -1$ và có nghiệm $x = \dfrac{-m+2}{m+1}$ khi $m \neq -1$.

Để kết luận về nghiệm của phương trình đã cho, ta lập bảng sau đây.

	Nghiệm của (1a)	*Nghiệm của* (1b)	*Nghiệm của* (1)
$m = 1$	vô nghiệm	$\dfrac{-m+2}{m+1} = \dfrac{1}{2}$	
$m = -1$	$\dfrac{m+2}{m-1} = -\dfrac{1}{2}$	vô nghiệm	
$m \neq \pm 1$	$\dfrac{m+2}{m-1}$	$\dfrac{-m+2}{m+1}$	

H1 *Điền vào cột cuối trong bảng trên rồi phát biểu kết luận về nghiệm của phương trình (1).*

b) ***Cách giải 2***

Do hai vế của phương trình $|ax+b| = |cx+d|$ luôn không âm nên khi bình phương hai vế của nó, ta được phương trình tương đương. Như vậy, có thể giải phương trình nêu ở ví dụ 1 như sau

$(1) \Leftrightarrow (mx-2)^2 = (x+m)^2 \Leftrightarrow (m^2-1)x^2 - 6mx + 4 - m^2 = 0.$

H2 *Giải tiếp phương trình trên bằng cách xét các trường hợp* $m = -1$, $m = 1$ *và* $m \neq \pm 1$ *rồi so sánh với kết quả thu được từ cách 1.*

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta phải chú ý đến điều kiện xác định của phương trình.

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình

$$\frac{mx+1}{x-1} = 2. \qquad (2)$$

Giải. Điều kiện của phương trình là $x - 1 \neq 0$, tức là $x \neq 1$. Với điều kiện đó, ta có

$$(2) \Leftrightarrow mx + 1 = 2(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)x = -3. \quad (2a)$$

1) Với $m \neq 2$, ta có $m - 2 \neq 0$. Phương trình (2a) có nghiệm $x = \frac{-3}{m-2}$. Giá trị này là nghiệm của (2) nếu nó thoả mãn điều kiện $x \neq 1$. Ta có

$$\frac{-3}{m-2} \neq 1 \Leftrightarrow -3 \neq m - 2 \Leftrightarrow m \neq -1.$$

Do đó :

Khi $m \neq 2$ và $m \neq -1$ thì $x = \frac{-3}{m-2}$ là nghiệm của (2) ;

Khi $m = -1$ thì giá trị $x = \frac{-3}{m-2}$ bị loại. Phương trình (2) vô nghiệm.

2) Với $m = 2$, phương trình (2a) trở thành $0x = -3$. Phương trình này vô nghiệm nên phương trình (2) vô nghiệm.

Kết luận

Khi $m \neq -1$ và $m \neq 2$, phương trình (2) có nghiệm $x = \frac{-3}{m-2}$.

Khi $m = -1$ hoặc $m = 2$, phương trình (2) vô nghiệm. □

Ví dụ 3. Giải và biện luận phương trình

$$\frac{x^2 - 2(m+1)x + 6m - 2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}. \quad (3)$$

Giải. Điều kiện của phương trình là $x - 2 > 0$, hay $x > 2$. Với điều kiện đó, ta có

$$(3) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2(m+1)x + 6m - 2}{\sqrt{x-2}} = \frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (2m+3)x + 6m = 0. \quad (3a)$$

Phương trình (3a) luôn có hai nghiệm là $x = 3$ và $x = 2m$.

– Giá trị $x = 3$ thoả mãn điều kiện $x > 2$ nên nó là nghiệm của phương trình (3) với mọi m.

– Để giá trị $x = 2m$ là nghiệm của (3), nó phải thoả mãn điều kiện $x > 2$. Ta có $2m > 2 \Leftrightarrow m > 1$. Điều đó có nghĩa là :

– Nếu $m > 1$ thì $x = 2m$ là nghiệm của (3) ;

– Nếu $m \leq 1$ thì $x = 2m$ không thoả mãn điều kiện của ẩn và bị loại.

Tổng hợp các kết quả trên, ta đi đến kết luận :

Khi $m > 1$, phương trình (3) có hai nghiệm $x = 3$ và $x = 2m$;

(hai nghiệm này trùng nhau khi $m = \frac{3}{2}$).

Khi $m \leq 1$, phương trình (3) có một nghiệm duy nhất $x = 3$. □

H3 *Hãy chọn phương án trả lời đúng trong các phương án cho sau đây.*

Với giá trị nào của tham số a thì phương trình $(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x - a} = 0$ có hai nghiệm phân biệt ?

(A) $a < -3$; (B) $-3 \leq a < -1$;

(C) $a \geq -1$; (D) *Không có giá trị nào của a.*

Câu hỏi và bài tập

22. Giải các phương trình :

a) $\frac{2(x^2-1)}{2x+1} = 2 - \frac{x+2}{2x+1}$; b) $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{5x-3}{3x+5}$.

23. Giải phương trình $\frac{m-3}{x-4} = m^2 - m - 6$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $m = 3$; b) $m \neq 3$.

24. Giải và biện luận các phương trình (a và m là những tham số) :

a) $|\,2ax + 3\,| = 5$; b) $\frac{2mx - m^2 + m - 2}{x^2 - 1} = 1$.

Luyện tập

25. Giải và biện luận các phương trình (m, a và k là những tham số) :

a) $|mx - x + 1| = |x + 2|$;

b) $\dfrac{a}{x-2} + \dfrac{1}{x-2a} = 1$;

c) $\dfrac{mx - m - 3}{x+1} = 1$;

d) $\dfrac{3x+k}{x-3} = \dfrac{x-k}{x+3}$.

26. Giải và biện luận các phương trình sau (m và a là những tham số):

a) $(2x + m - 4)(2mx - x + m) = 0$;

b) $|mx + 2x - 1| = |x|$;

c) $(mx + 1)\sqrt{x-1} = 0$;

d) $\dfrac{2a-1}{x-2} = a - 2$;

e) $\dfrac{(m+1)x + m - 2}{x+3} = m$;

f) $\left|\dfrac{ax+1}{x-1}\right| = a$.

27. Bằng cách đặt ẩn phụ, giải các phương trình sau :

a) $4x^2 - 12x - 5\sqrt{4x^2 - 12x + 11} + 15 = 0$;

b) $x^2 + 4x - 3|x + 2| + 4 = 0$;

c) $4x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \left|2x - \dfrac{1}{x}\right| - 6 = 0$.

28. Tìm các giá trị của tham số m sao cho phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$|mx - 2| = |x + 4|.$$

29. Với giá trị nào của a thì phương trình sau vô nghiệm ?

$$\frac{x+1}{x-a+1} = \frac{x}{x+a+2}.$$



VÀI NÉT VỀ LỊCH SỬ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ



N. Hen-rich A-ben
(*N. Henrik Abel*, 1802 – 1829)



E. Ga-loa
(*E. Galois, 1811 – 1832*)

Lí thuyết phương trình đại số có lịch sử rất lâu đời. Từ 2000 năm trước Công nguyên, người Ai Cập đã biết giải các phương trình bậc nhất, người Ba-bi-lon đã biết giải các phương trình bậc hai và tìm được những bảng đặc biệt để giải phương trình bậc ba. Tất nhiên, các hệ số của phương trình được xét đều là những số đã cho nhưng cách giải của người xưa chứng tỏ rằng họ cũng biết đến các quy tắc tổng quát. Trong nền toán học cổ của người Hi Lạp, lí thuyết phương trình đại số được phát triển trên cơ sở hình học, liên quan đến việc phát minh ra tính vô ước của một số đoạn thẳng. Vì lúc đó người Hi Lạp chỉ biết các số nguyên dương và phân số dương nên đối với họ, phương trình $x^2 = 2$ vô nghiệm. Tuy nhiên, phương trình đó lại giải được trong phạm vi các đoạn thẳng vì nghiệm của nó là đường chéo của hình vuông có cạnh bằng 1 (đơn vị dài).

Đến thế kỉ VII, lí thuyết phương trình bậc nhất và bậc hai được các nhà toán học Ấn Độ phát triển. Phương pháp giải phương trình bậc hai bằng cách bổ sung thành bình phương của một nhị thức là một sáng kiến của người Ấn Độ. Người Ấn Độ cũng sử dụng rộng rãi các số âm. Họ cũng đưa vào các chữ số mà nay ta gọi là chữ số Ả Rập với cách viết theo vị trí của các chữ số.

Đến thế kỉ XVI, các nhà toán học I-ta-li-a là Tác-ta-gli-a (*N. Tartaglia, 1500 – 1557*), Các-đa-nô (*G. Cardano, 1501 – 1576*) và Fe-ra-ri (*L. Ferrari, 1522 – 1565*) đã giải được các phương trình bậc ba và bậc bốn, tức là tìm được công thức tính nghiệm của phương trình qua các hệ số của nó.

Đến đầu thế kỉ XIX, nhà toán học A-ben, người Na Uy mới chứng minh được rằng không thể giải phương trình tổng quát bậc lớn hơn bốn bằng các phương tiện thuần tuý đại số. Sau cùng, Ga-loa (nhà toán học Pháp) đã giải quyết được trọn vẹn vấn đề giải các phương trình đại số.

§ 4 HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

Nhắc lại rằng *phương trình bậc nhất hai ẩn* (x và y) là phương trình dạng

$$ax + by = c \ (a, b \text{ và } c \text{ là những số đã cho, } a^2 + b^2 \neq 0). \quad (1)$$

Ta đã biết phương trình (1) có vô số nghiệm ; trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi một đường thẳng gọi là đường thẳng $ax + by = c$. Chúng ta cũng đã làm quen với *hệ phương trình bậc nhất hai ẩn* và cách giải chúng bằng phương pháp cộng đại số hoặc phương pháp thế.

Trong bài này, chúng ta sẽ nghiên cứu kĩ hơn về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

1. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Cho hai phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$ (tức là $a^2 + b^2 \neq 0$ và $a'^2 + b'^2 \neq 0$). Khi đó, ta có ***hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn*** sau :

$$\text{(I)} \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Mỗi cặp số (x_0 ; y_0) đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình trong hệ được gọi là một ***nghiệm*** *của hệ.*

Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Các khái niệm *hệ phương trình tương đương*, *hệ phương trình hệ quả* cũng tương tự như đối với phương trình.

Đối với hệ phương trình, chúng ta cũng có những phép biến đổi tương đương, tức là phép biến đổi một hệ phương trình thành một hệ phương trình khác tương đương với nó. Biến đổi hệ phương trình bằng cách áp dụng quy tắc cộng đại số hoặc quy tắc thế mà ta đã học chính là những phép biến đổi tương đương các hệ phương trình.

H1 *Giải các hệ phương trình sau :*

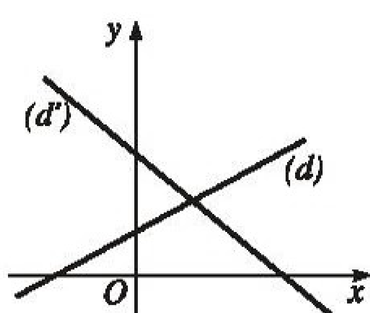
a) $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -2x + 6y = 2 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x - \dfrac{1}{3}y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

• Giả sử (d) là đường thẳng $ax + by = c$ và (d') là đường thẳng $a'x + b'y = c'$. Khi đó (h.3.2) :

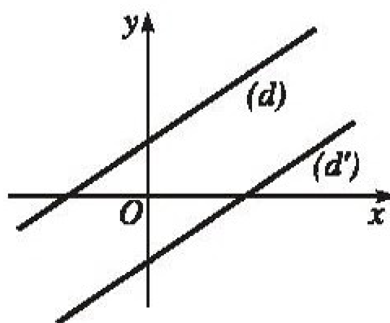
1) Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (d) và (d') cắt nhau ;

2) Hệ (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (d) và (d') song song với nhau ;

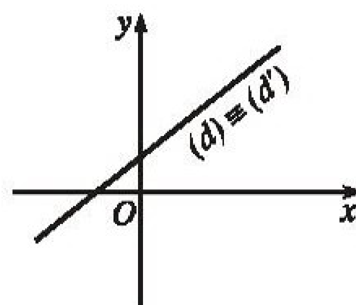
3) Hệ (I) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ (d) và (d') trùng nhau.



a)



b)



c)

Hình 3.2

2. Giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

a) Xây dựng công thức

Xét hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\text{(I)} \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c'. & (2) \end{cases}$$

– Nhân hai vế của phương trình (1) với b', hai vế của phương trình (2) với $-b$ rồi cộng các vế tương ứng, ta được

$$(ab' - a'b)x = cb' - c'b. \quad (3)$$

– Nhân hai vế của phương trình (1) với $-a'$, hai vế của phương trình (2) với a rồi cộng các vế tương ứng, ta được

$$(ab' - a'b)y = ac' - a'c. \quad (4)$$

– Trong (3) và (4), ta đặt $D = ab' - a'b$, $D_x = cb' - c'b$ và $D_y = ac' - a'c$. Khi đó, ta có hệ phương trình *hệ quả*

$$(II)\begin{cases} D.x = D_x \\ D.y = D_y. \end{cases}$$

Đối với hệ (II), ta xét các trường hợp sau đây.

1) $D \neq 0$, lúc này hệ (II) có một nghiệm duy nhất

$$(x\ ;\ y) = \left(\frac{D_x}{D}\ ;\ \frac{D_y}{D}\right). \quad (5)$$

Ta thấy đây cũng là nghiệm của hệ phương trình (I).

H2 *Hãy thử lại rằng (5) là một nghiệm của hệ (I) để khẳng định kết luận trên.*

2) $D = 0$, lúc này hệ (II) trở thành

$$\begin{cases} 0x = D_x \\ 0y = D_y. \end{cases}$$

– Nếu $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ (II) vô nghiệm nên hệ (I) vô nghiệm.

– Nếu $D_x = D_y = 0$ thì hệ (II) có vô số nghiệm. Tuy nhiên, muốn tìm nghiệm của hệ (I), ta phải trở về hệ (I) (do (II) chỉ là hệ phương trình hệ quả).

Theo giả thiết, hai số a và b không cùng bằng 0 nên ta có thể giả sử $a \neq 0$ (trường hợp $b \neq 0$ cũng giải tương tự). Ta có

$$D = ab' - a'b = 0 \Rightarrow b' = \frac{a'}{a}b\ ;$$

$$D_y = ac' - a'c = 0 \Rightarrow c' = \frac{a'}{a}c.$$

Bởi vậy, hệ (I) có thể viết thành

$$\begin{cases} ax + by = c \\ \dfrac{a'}{a}(ax + by) = \dfrac{a'}{a}c. \end{cases}$$

Do đó, tập nghiệm của hệ (I) trùng với tập nghiệm của phương trình $ax + by = c$ (ta đã biết cách giải phương trình này).

Kết quả trên có thể tóm tắt như sau :

$$\begin{cases} ax + by = c & (a^2 + b^2 \neq 0) \\ a'x + b'y = c' & (a'^2 + b'^2 \neq 0) \end{cases}$$

1) $D \neq 0$: Hệ có một nghiệm duy nhất $(x\ ;\ y)$, trong đó

$$x = \frac{D_x}{D}\ ;\ y = \frac{D_y}{D}.$$

2) $D = 0$:

• $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$: Hệ vô nghiệm.

• $D_x = D_y = 0$: Hệ có vô số nghiệm, tập nghiệm của hệ là tập nghiệm của phương trình $ax + by = c$.

b) Thực hành giải và biện luận

Trong thực hành giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, định thức là một công cụ đem lại nhiều thuận tiện.

Biểu thức $pq' - p'q$, với p, q, p', q' là những số, được gọi là một ***định thức cấp hai*** *và kí hiệu là*

$$\begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix} \text{ (chú ý cách tính } \begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix} = pq' - p'q).$$

Như vậy, các biểu thức D, D_x và D_y mà chúng ta gặp khi giải hệ (I) đều là những định thức cấp hai :

$$D = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix},\ D_x = cb' - c'b = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix},\ D_y = ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

Ta thấy trong mỗi định thức trên đều có hai *hàng* và hai *cột*.

H3 *a) Tìm từ thích hợp để điền vào chỗ trống :*

Trong định thức D, cột thứ nhất gồm các hệ số của ... ; cột thứ hai gồm các hệ số của ... .

b) Phát biểu các câu tương tự đối với D_x và D_y.

Ta có thể sử dụng định thức để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x - 2y = -9 \\ 4x + 3y = 2. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \,.\, 3 - 4 \,.\, (-2) = 23 \neq 0 \;;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -9 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-9) \,.\, 3 - 2 \,.\, (-2) = -23 \;; \text{ suy ra } x = \frac{D_x}{D} = -1 \;;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -9 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 5 \,.\, 2 - 4 \,.\, (-9) = 46 \;; \text{ suy ra } y = \frac{D_y}{D} = 2.$$

Vậy hệ phương trình có một nghiệm duy nhất $(x\,;\,y) = (-1\,;\,2)$. □

H4 *Bằng định thức, giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 7x + 4y = 2. \end{cases}$$

Ví dụ 2. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2. \end{cases}$$

Giải. Trước hết, ta tính các định thức

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1) \;;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 2 = (m-1)(m+2) \;;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = m - 1.$$

Ta phải xét các trường hợp sau :

1) $D \neq 0$, tức là $m \neq \pm 1$. Ta có

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{(m-1)(m+2)}{(m-1)(m+1)} = \frac{m+2}{m+1} \;;$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{m-1}{(m-1)(m+1)} = \frac{1}{m+1}.$$

Hệ có một nghiệm duy nhất $(x\,;\,y) = \left(\frac{m+2}{m+1}\,;\,\frac{1}{m+1}\right)$.

2) D = 0, tức là $m = 1$ hoặc $m = -1$.

– Nếu $m = 1$ thì $D = D_x = D_y = 0$ và hệ trở thành $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2. \end{cases}$ Ta có

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 - x. \end{cases}$$

– Nếu $m = -1$ thì D = 0, nhưng $D_x \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

Kết luận :

Với $m \neq \pm 1$, hệ có nghiệm duy nhất $(x ; y) = \left(\dfrac{m+2}{m+1} ; \dfrac{1}{m+1} \right)$;

Với $m = -1$, hệ vô nghiệm ;

Với $m = 1$, hệ có vô số nghiệm $(x ; y)$ tính theo công thức

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 - x. \end{cases}$$ □

3. Ví dụ về giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{cases}$$

trong đó các hệ số của ba ẩn x, y, z trong mỗi phương trình của hệ không đồng thời bằng 0.

Giải hệ phương trình trên là tìm tất cả các bộ ba số $(x ; y ; z)$ đồng thời nghiệm đúng cả ba phương trình của hệ.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình (tức là tìm tất cả các nghiệm chung của các phương trình trong hệ)

$$\text{(III)} \begin{cases} x + y + z = 2 & (6) \\ x + 2y + 3z = 1 & (7) \\ 2x + y + 3z = -1. & (8) \end{cases}$$

Cách giải. Từ (6) ta có

$$z = 2 - x - y. \quad (9)$$

Thay thế z trong (9) vào (7) và (8), ta được

$$x + 2y + 3(2 - x - y) = 1 \Leftrightarrow 2x + y = 5\ ;$$
$$2x + y + 3(2 - x - y) = -1 \Leftrightarrow x + 2y = 7.$$

Ta thu được hệ phương trình bậc nhất hai ẩn quen thuộc

$$\text{(IV)} \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 7. \end{cases}$$ □

H5 *Giải tiếp hệ (IV) để tìm x và y rồi thế vào (9) để tìm z và kết luận về nghiệm của hệ (III).*

Nhận xét. Qua ví dụ trên, ta thấy : Nguyên tắc chung để giải các hệ phương trình nhiều ẩn là *khử bớt ẩn* để quy về giải các phương trình hay hệ phương trình có số ẩn ít hơn. Để khử bớt ẩn, ta cũng có thể dùng các phương pháp cộng đại số hay phương pháp thế giống như đối với hệ phương trình hai ẩn.

H6 *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 13 \\ 4x - 2y - 3z = 3 \\ -x + 2y + 4z = -1. \end{cases}$$

Câu hỏi và bài tập

30. Cho một hệ hai phương trình hai ẩn. Biết rằng phương trình thứ hai trong hệ nghiệm đúng với mọi giá trị của các ẩn. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

(A) Hệ đã cho nghiệm đúng với mọi giá trị của các ẩn ;

(B) Hệ đã cho vô nghiệm ;

(C) Tập nghiệm của hệ đã cho trùng với tập nghiệm của phương trình thứ nhất ;

(D) Cả ba khẳng định trên đều sai.

31. Bằng định thức, giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8\ ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = -1 \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0. \end{cases}$

32. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{y-1} = 3 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{y-1} = 4\ ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3(x+y)}{x-y} = -7 \\ \dfrac{5x-y}{y-x} = \dfrac{5}{3}. \end{cases}$

33. Giải và biện luận các hệ phương trình :

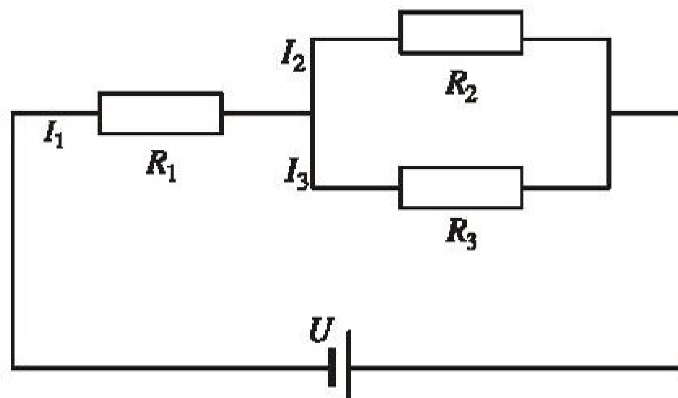
a) $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2ax + 3y = 5 \\ (a+1)x + y = 0. \end{cases}$

34. Giải hệ phương trình sau (có thể dùng máy tính bỏ túi để kiểm tra kết quả – Xem bài đọc thêm trang 94) :

$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24. \end{cases}$$

35. Hình 3.3 cho một mạch điện kín. Biết $R_1 = 0{,}25\ \Omega$, $R_2 = 0{,}36\ \Omega$, $R_3 = 0{,}45\ \Omega$ và $U = 0{,}6$ V. Gọi I_1 là cường độ dòng điện của mạch chính, I_2 và I_3 là cường độ dòng điện của hai mạch rẽ. Tính I_1, I_2 và I_3 (chính xác đến hàng phần trăm).



Hình 3.3

Hướng dẫn. I_1, I_2 và I_3 là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 = U \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0. \end{cases}$$

Bài đọc thêm

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BẰNG MÁY TÍNH CASIO *fx - 500MS*

Máy tính CASIO *fx - 500MS* có thể giúp ta tìm nghiệm đúng hoặc nghiệm gần đúng (với chín chữ số thập phân) của hệ phương trình bậc nhất với các *hệ số bằng số*.

1. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Để giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases}$$

ta phải vào chương trình tương ứng bằng cách ấn liên tiếp các phím $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$. Sau đó, nhập từng hệ số $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ bằng cách ấn phím tương ứng với mỗi hệ số đó và phím $\boxed{=}$.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 5x - 4y = -10. \end{cases}$$

Ta ấn lần lượt các phím sau :

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 3 $\boxed{=}$ 1 $\boxed{=}$ 11 $\boxed{=}$ 5 $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ 4 $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ 10 $\boxed{=}$

Khi đó, trên màn hình xuất hiện $x = 2$. Ấn tiếp phím $\boxed{=}$, trên màn hình xuất hiện $y = 5$. Như vậy, hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x\ ;\ y) = (2\ ;\ 5)$. □

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 3x + 4y = 8. \end{cases}$$

Ta ấn lần lượt các phím sau :

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ 5 $\boxed{=}$ 3 $\boxed{=}$ 3 $\boxed{=}$ 4 $\boxed{=}$ 8 $\boxed{=}$

Khi đó, trên màn hình xuất hiện $x = 2.260\,869\,565$. Để tìm giá trị của x dưới dạng phân số, ta ấn tiếp hai phím $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{d/c}}$, ta được $x = \dfrac{52}{23}$. Ấn tiếp phím $\boxed{=}$, trên màn hình xuất hiện $y = 0.304\,347\,826$. Khi ấn tiếp hai phím $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{d/c}}$, ta được $y = \dfrac{7}{23}$.

Như vậy, hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x\ ;\ y) = \left(\dfrac{52}{23}; \dfrac{7}{23}\right)$ và nghiệm gần đúng với chín chữ số thập phân của hệ phương trình đó là

$$\begin{cases} x \approx 2{,}260\ 869\ 565 \\ y \approx 0{,}304\ 347\ 826. \end{cases}$$ □

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x + 2\sqrt{3}y = 7 \\ -x + 5{,}43y = 15. \end{cases}$$

Ta ấn lần lượt các phím sau :

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 5 $\boxed{=}$ 2 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 3 $\boxed{=}$ 7 $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ 1 $\boxed{=}$ 5,43 $\boxed{=}$ 15 $\boxed{=}$

Khi đó, trên màn hình xuất hiện $x = -0.455\,722\,15$. Ấn tiếp phím $\boxed{=}$, trên màn hình xuất hiện $y = 2.678\,504\,208$. Như vậy, hệ phương trình có nghiệm duy nhất và nghiệm gần đúng với chín chữ số thập phân của hệ phương trình đó là

$$\begin{cases} x \approx -0{,}45572215 \\ y \approx 2{,}678504208. \end{cases}$$ □

Chú ý rằng hệ phương trình trên không có nghiệm hữu tỉ. Do đó, sau khi có giá trị gần đúng $x \approx -0{,}455\,722\,15$ (hoặc $y \approx 2{,}678\,504\,208$), nếu ta ấn tiếp hai phím SHIFT d/c thì trên màn hình vẫn chỉ có giá trị gần đúng đó mà thôi.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x + 3y = 8 \\ -2x - \dfrac{3}{2}y = 5. \end{cases}$$

Ta ấn lần lượt các phím sau :

MODE MODE 1 2 4 = 3 = 8 = (−) 2 = (−) 3 a b/c 2 = 5 =

Khi đó, trên màn hình xuất hiện **Math ERROR.** Điều đó có nghĩa là hệ phương trình vô nghiệm hoặc vô định. □

Để xoá **Math ERROR**, ta ấn phím AC .

2. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

Để giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{cases}$$

ta phải vào chương trình tương ứng bằng cách ấn liên tiếp các phím MODE MODE 1 3 . Sau đó, việc nhập từng hệ số a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3 cũng giống như đối với hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Hãy giải hệ phương trình sau và đối chiếu kết quả thu được với đáp số :

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 7 \\ 3x + 4y - 8z = 9 \\ -x + 2y - 4z = 3. \end{cases}$$

Đáp số : $(x\,;\,y\,;\,z) = \left(\dfrac{3}{5};\ -\dfrac{17}{7};\ -\dfrac{74}{35}\right)$. □

Luyện tập

36. Cho một hệ hai phương trình hai ẩn. Biết rằng phương trình thứ hai trong hệ vô nghiệm. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

(A) Hệ đã cho nghiệm đúng với mọi giá trị của các ẩn ;

(B) Hệ đã cho vô nghiệm ;

(C) Tập nghiệm của hệ đã cho trùng với tập nghiệm của phương trình thứ nhất ;

(D) Cả ba khẳng định trên đều sai.

37. Tìm nghiệm gần đúng của các hệ phương trình sau (chính xác đến hàng phần trăm, có thể dùng máy tính bỏ túi) :

a) $\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 1 \\ 5x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 4x + (\sqrt{3} - 1)y = 1 \\ (\sqrt{3} + 1)x + 3y = 5. \end{cases}$

38. Một miếng đất hình chữ nhật có chu vi $2p$ (mét). Nếu mở rộng miếng đất đó bằng cách tăng một cạnh thêm 3 m và cạnh kia thêm 2 m thì diện tích miếng đất tăng thêm 246 m^2. Tính các kích thước của miếng đất đó (biện luận theo p).

39. Giải và biện luận các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} mx + y = 4 - m \\ 2x + (m - 1)y = m. \end{cases}$

40. Với giá trị nào của a thì mỗi hệ phương trình sau có nghiệm ?

a) $\begin{cases} (a + 1)x - y = a + 1 \\ x + (a - 1)y = 2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} (a + 2)x + 3y = 3a + 9 \\ x + (a + 4)y = 2. \end{cases}$

41. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(a\ ;\ b)$ sao cho hệ phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ 6x + by = 4. \end{cases}$$

42. Cho hai đường thẳng (d_1) : $x + my = 3$ và (d_2) : $mx + 4y = 6$. Với giá trị nào của m thì :

a) Hai đường thẳng cắt nhau ?

b) Hai đường thẳng song song với nhau ?

c) Hai đường thẳng trùng nhau ?

43. Giải hệ phương trình (có thể dùng máy tính bỏ túi để kiểm tra kết quả)

$$\begin{cases} x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 3. \end{cases}$$

44. *Bài toán máy bơm nước*

Một gia đình muốn mua một chiếc máy bơm nước. Có hai loại với cùng lưu lượng nước bơm được trong một giờ ; loại thứ nhất giá 1,5 triệu đồng, loại thứ hai giá 2 triệu đồng. Tuy nhiên, nếu dùng máy bơm loại thứ nhất thì mỗi giờ tiền điện phải trả là 1200 đồng, trong khi dùng máy bơm loại thứ hai thì chỉ phải trả 1000 đồng cho mỗi giờ bơm.

Kí hiệu $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt là số tiền (tính bằng nghìn đồng) phải trả khi sử dụng máy bơm loại thứ nhất và loại thứ hai trong x giờ (bao gồm tiền điện và tiền mua máy bơm).

a) Hãy biểu diễn $f(x)$ và $g(x)$ dưới dạng các biểu thức của x.

b) Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

c) Xác định toạ độ giao điểm của hai đồ thị ấy. Hãy phân tích ý nghĩa kinh tế của giao điểm đó.

§ 5 MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

Để giải một hệ phương trình bậc hai với hai ẩn, ta cũng thường dùng các phương pháp quen thuộc như phương pháp thế, phương pháp cộng đại số và phương pháp đặt ẩn phụ. Tất nhiên, việc chọn phương pháp nào phụ thuộc vào các phương trình cụ thể. Sau đây là một số ví dụ đơn giản.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 + 2y^2 - 2xy = 5. \end{cases}$$

Cách giải. Dùng phương pháp thế, tính x theo y từ phương trình thứ nhất rồi thế vào phương trình thứ hai, ta được

$$\text{(Ia)} \quad \begin{cases} x = 5 - 2y \\ 10y^2 - 30y + 20 = 0. \end{cases}$$

H1 *Giải tiếp hệ* (Ia) *rồi suy ra nghiệm của hệ* (I).

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ xy + x + y = 2. \end{cases}$$

Cách giải. Ta có nhận xét rằng vế trái của mỗi phương trình trong hệ đã cho là một biểu thức đối xứng đối với x và y (nghĩa là : Khi thay thế x bởi y và y bởi x thì biểu thức không thay đổi). Trong trường hợp này, ta dùng cách đặt ẩn phụ

$$S = x + y \text{ và } P = xy.$$

Khi đó, $x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = S^2 - P$.

Do đó, từ hệ (II), ta có hệ phương trình (ẩn là S và P)

$$\begin{cases} S^2 - P = 4 \\ S + P = 2. \end{cases}$$

Dễ thấy hệ này có hai nghiệm là $\begin{cases} S = -3 \\ P = 5 \end{cases}$ và $\begin{cases} S = 2 \\ P = 0. \end{cases}$

Do đó

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \text{(IIa)} \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 5 \end{cases} \text{ hoặc (IIb)} \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0. \end{cases}$$

H2 *Giải hai hệ phương trình* (IIa) *và* (IIb) *rồi kết luận về nghiệm của* (II).

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\text{(III)} \begin{cases} x^2 - 2x = y \\ y^2 - 2y = x. \end{cases}$$

Cách giải. Ta có nhận xét : Trong hệ (III), nếu thay thế đồng thời x bởi y và y bởi x thì phương trình thứ nhất biến thành phương trình thứ hai và ngược lại, phương trình thứ hai biến thành phương trình thứ nhất.

Đối với hệ phương trình có tính chất đó, ta thường giải bằng cách trừ từng vế hai phương trình trong hệ. Cụ thể, đối với hệ (III) ta trừ từng vế hai phương trình trong hệ và được

$$(x^2 - y^2) - 2(x - y) = -(x - y) \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y = 0 \text{ hoặc } x + y - 1 = 0.$$

Do đó

$$\text{(III)} \Leftrightarrow \text{(IIIa)} \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - 2x = y \end{cases} \text{ hoặc (IIIb)} \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 - 2x = y. \end{cases}$$

Ta chỉ còn phải giải hai hệ (IIIa) và (IIIb) mà ta đã biết cách giải.

H3 *Giải các hệ phương trình* (IIIa) *và* (IIIb) *rồi suy ra nghiệm của hệ* (III).

CHÚ Ý

1) Các hệ phương trình có tính chất như trong hai ví dụ 2 và 3 được gọi chung là *hệ phương trình đối xứng* (đối với hai ẩn).

2) *Nếu một hệ phương trình đối xứng có nghiệm là* $(a\ ;\ b)$ *thì nó cũng có nghiệm là* $(b\ ;\ a)$. Nhận xét này rất hữu ích khi gặp các bài toán về hệ phương trình đối xứng.

H4 *Cho hệ phương trình* $\begin{cases} 2x^2 + y = 5x \\ 2y^2 + x = 5y. \end{cases}$ *Biết rằng hệ đã cho có bốn nghiệm và hai trong bốn nghiệm đó là* $(2\ ;\ 2)$ *và* $\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$. *Tìm các nghiệm còn lại mà không cần biến đổi hệ phương trình. Hãy nêu rõ cách tìm.*

Câu hỏi và bài tập

45. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 164\ ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 7 \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

46. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ xy + x + y = 5\ ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x + y = 2 \\ xy + x - y = -1\ ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ y^2 - 3y = 2x. \end{cases}$

47. Tìm quan hệ giữa S và P để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P. \end{cases}$$

(S và P là hai số cho trước).

48. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 208 \\ xy = 96\ ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 55 \\ xy = 24. \end{cases}$

49. Tìm hàm số bậc hai $y = f(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau :

1) Parabol $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm $(0\ ;\ -4)$.

2) $f(2) = 6$.

3) Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm và hiệu giữa nghiệm lớn và nghiệm nhỏ bằng 5.

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương III

50. Phương trình dạng $ax + b = 0$ có thể có nghiệm trong các trường hợp nào ?

51. Giả sử ba phương trình $f(x)g(x) = 0$, $f(x) = 0$ và $g(x) = 0$ (với cùng tập xác định) có các tập nghiệm lần lượt là S, S_1 và S_2. Hãy chọn kết luận đúng trong hai kết luận sau :

a) $S = S_1 \cap S_2$;   b) $S = S_1 \cup S_2$.

52. Hệ phương trình dạng $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ ($a^2 + b^2 \neq 0$ và $a'^2 + b'^2 \neq 0$) có thể có nghiệm trong các trường hợp nào ?

Áp dụng. Tìm a để hệ phương trình $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$ có nghiệm.

53. Biết rằng phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm kép x_0. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

(A) Tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ luôn có thể viết dưới dạng bình phương của một nhị thức bậc nhất ;

(B) Parabol $y = ax^2 + bx + c$ luôn có đỉnh thuộc trục hoành ;

(C) Phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ luôn có một nghiệm kép là $\dfrac{1}{x_0}$.

54. Giải và biện luận phương trình $m(mx - 1) = x + 1$.

55. Cho phương trình $p(x + 1) - 2x = p^2 + p - 4$. Tìm các giá trị của p để :

a) Phương trình đó nhận 1 là nghiệm ;

b) Phương trình đó có nghiệm ;

c) Phương trình đó vô nghiệm.

56. Ba cạnh của một tam giác vuông có độ dài là ba số tự nhiên liên tiếp. Tìm ba số đó.

57. Cho phương trình $(m - 1)x^2 + 2x - 1 = 0$.

a) Giải và biện luận phương trình đã cho.

b) Tìm các giá trị của m sao cho phương trình đó có hai nghiệm trái dấu.

c) Tìm các giá trị của m sao cho tổng các bình phương hai nghiệm của phương trình đó bằng 1.

58. Với giá trị nào của a thì hai phương trình sau có nghiệm chung ?

$$x^2 + x + a = 0 \text{ và } x^2 + ax + 1 = 0.$$

59. Cho các phương trình :

$$x^2 + 3x - m + 1 = 0, \quad (1) \qquad 2x^2 - x + 1 - 2p = 0. \quad (2)$$

a) Biện luận số nghiệm của mỗi phương trình đã cho bằng đồ thị.

b) Kiểm tra lại kết quả trên bằng phép tính.

60. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^2 + y^2 - xy = 3 \, ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(x+y)^2 - xy = 1 \\ x^2y + xy^2 = 0. \end{cases}$

61. Giải và biện luận các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} mx + 3y = m - 1 \\ 2x + (m-1)y = 3 \, ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + (a-2)y = a \\ (a+3)x + (a+3)y = 2a. \end{cases}$

62. Giải và biện luận các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = m \, ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x^2 + y^2 = m. \end{cases}$

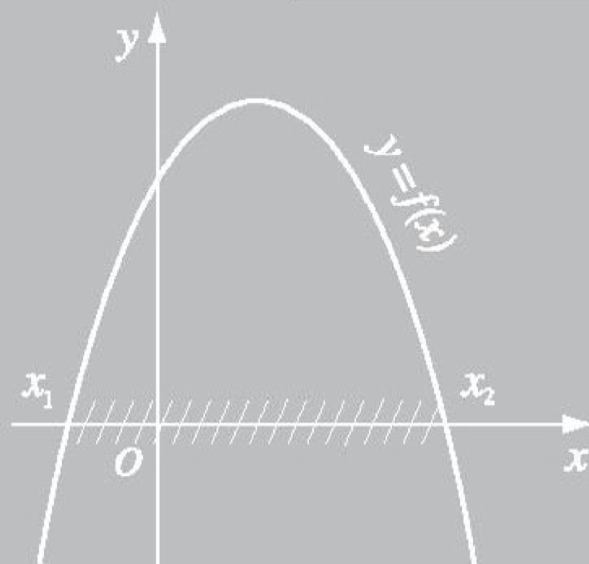
63. Tìm a, b và c để parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh là điểm $I(1 ; -4)$ và đi qua điểm $M(2 ; -3)$. Hãy vẽ parabol nhận được.

64. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$. Lấy một điểm M ở giữa B và C. Qua M, ta kẻ các đường thẳng ME và MF lần lượt song song với các cạnh AC và AB ($E \in AB$, $F \in AC$). Hỏi phải lấy điểm M cách B bao nhiêu để $ME + MF = l$ (l là độ dài cho trước) ? Biện luận theo l, a, b và c.

Chương 4

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$y = f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	



$f(x) < 0 \Leftrightarrow$

$x < x_1$ hoặc $x > x_2$

Bất đẳng thức và bất phương trình là những khái niệm mà chúng ta đã làm quen ở lớp dưới. Chương này sẽ hoàn thiện hơn các khái niệm đó, đồng thời cung cấp cho chúng ta những kiến thức mới như vấn đề xét dấu của nhị thức bậc nhất và dấu của tam thức bậc hai. Chúng có nhiều ứng dụng quan trọng trong việc giải và biện luận các phương trình và bất phương trình. Chúng ta cần nắm vững các kiến thức đó, đồng thời rèn luyện kĩ năng áp dụng chúng để giải các bài toán trong khuôn khổ của chương trình.

§ 1 BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1. Ôn tập và bổ sung tính chất của bất đẳng thức

Giả sử a và b là hai số thực. Các mệnh đề "$a > b$", "$a < b$", "$a \geq b$", "$a \leq b$" được gọi là những *bất đẳng thức*.

Cũng như các mệnh đề lôgic khác, một bất đẳng thức có thể *đúng* hoặc *sai*.

Chứng minh một bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng.

Dưới đây là một số tính chất đã biết của bất đẳng thức.

$a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$
$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$
Nếu $c > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac > bc$.
Nếu $c < 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac < bc$.

Từ đó ta có các hệ quả sau :

$a > b$ và $c > d \Rightarrow a + c > b + d$;

$a + c > \text{b} \Leftrightarrow a > b - c$;

$a > b \geq 0$ và $c > d \geq 0 \Rightarrow ac > bd$;

$a > b \geq 0$ và $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a^n > b^n$;

$a > b \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$;

$a > b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$.

Ví dụ 1. Không dùng bảng số hoặc máy tính, hãy so sánh hai số $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và 3.

Giải. Giả sử $\sqrt{2} + \sqrt{3} \leq 3$. Do hai vế của bất đẳng thức đó đều dương nên

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \leq 3 \Leftrightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \leq 9 \Leftrightarrow 5 + 2\sqrt{6} \leq 9$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{6} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{6} \leq 2 \Leftrightarrow 6 \leq 4, \text{ vô lí.}$$

Vậy $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$. □

Nếu A, B là những biểu thức chứa biến thì "$A > B$" là một mệnh đề chứa biến. Chứng minh bất đẳng thức $A > B$ (với điều kiện nào đó của các biến), nghĩa là chứng minh mệnh đề chứa biến $A > B$ đúng với tất cả các giá trị của các biến (thoả mãn điều kiện đó).

Từ nay, ta quy ước : Khi nói ta có bất đẳng thức $A > B$ (trong đó A và B là những biểu thức chứa biến) mà không nêu điều kiện đối với các biến thì ta hiểu rằng bất đẳng thức đó xảy ra với mọi giá trị của biến thuộc $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $x^2 > 2(x-1)$.

Giải. $x^2 > 2(x-1) \Leftrightarrow x^2 > 2x-2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 > 0.$$

Hiển nhiên $(x-1)^2 + 1 > 0$ với mọi x nên ta có bất đẳng thức cần chứng minh. □

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc.$$

Giải. Ta có các bất đẳng thức hiển nhiên sau :

$$a^2 \geq a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c)$$

$$b^2 \geq b^2 - (c-a)^2 = (b-c+a)(b+c-a)$$

$$c^2 \geq c^2 - (a-b)^2 = (c-a+b)(c+a-b).$$

Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên tất cả các vế của các bất đẳng thức trên đều dương. Nhân các vế tương ứng của ba bất đẳng thức trên, ta được

$$a^2b^2c^2 \geq (b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2.$$

Lấy căn bậc hai của hai vế, ta được bất đẳng thức cần chứng minh. □

2. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

Từ định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta suy ra các tính chất sau đây.

$-\lvert a\rvert \leq a \leq \lvert a\rvert$ với mọi $a \in \mathbb{R}$.
$\lvert x\rvert < a \Leftrightarrow -a < x < a$ (với $a > 0$).
$\lvert x\rvert > a \Leftrightarrow x < -a$ hoặc $x > a$ (với $a > 0$).

Sau đây là hai bất đẳng thức quan trọng khác về giá trị tuyệt đối (viết dưới dạng bất đẳng thức kép).

$$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \text{ (với mọi } a, b \in \mathbb{R}).$$

Ta chứng minh bất đẳng thức $|a+b| \leq |a| + |b|$. Thật vậy

$$|a+b| \leq |a| + |b| \Leftrightarrow (a+b)^2 \leq a^2 + 2|ab| + b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|ab| + b^2 \Leftrightarrow ab \leq |ab|.$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng nên ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

H1 *Sử dụng bất đẳng thức vừa chứng minh và đẳng thức* $|a| = |a + b + (-b)|$ *để chứng minh bất đẳng thức* $|a| - |b| \leq |a+b|$.

3. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân[1]

a) Đối với hai số không âm

Ta đã biết $\frac{a+b}{2}$ là trung bình cộng của hai số a và b. Khi a và b không âm thì $\sqrt{ab}$ gọi là trung bình nhân của chúng. Ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

Với mọi $a \geq 0$, $b \geq 0$ ta có

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Nói cách khác, *trung bình cộng của hai số không âm lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng. Trung bình cộng của hai số không âm bằng trung bình nhân của chúng khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.*

(1) Người ta còn gọi là bất đẳng thức Cô-si (Augustin-Louis Cauchy, 1789 – 1857).

Chứng minh. Với $a \geq 0, b \geq 0$, ta có

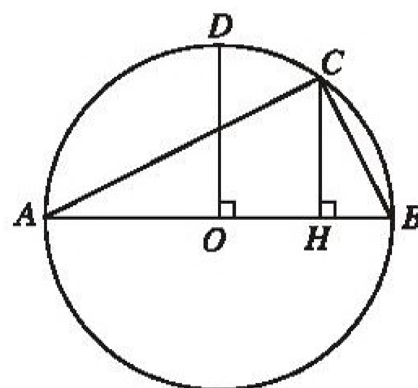
$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Do đó

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0$, tức là $a = b$. □

H2 *Trong hình 4.1, cho $AH = a$, $BH = b$. Hãy tính các đoạn OD và HC theo a và b. Từ đó suy ra bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân của a và b.*



Hình 4.1

Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba số dương bất kì thì

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6.$$

Giải. Ta có

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b}$$

$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} + 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 6.$$ □

HỆ QUẢ

Nếu hai số dương thay đổi nhưng có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

Nếu hai số dương thay đổi nhưng có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

Chứng minh. Giả sử hai số dương x và y có tổng $x + y = S$ không đổi. Khi đó, $\frac{S}{2} = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ nên $xy \leq \frac{S^2}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Do đó, tích xy đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{S^2}{4}$ khi và chỉ khi $x = y$.

Giả sử hai số dương x và y có tích $xy = P$ không đổi. Khi đó

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{P} \text{ nên } x + y \geq 2\sqrt{P}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$. Do đó, tổng $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{P}$ khi và chỉ khi $x = y$. □

ỨNG DỤNG

Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất.

Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích, hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

Ví dụ 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{3}{x}$ với $x > 0$.

Giải. Do $x > 0$ nên ta có $f(x) = x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{x.\frac{3}{x}} = 2\sqrt{3}$ và

$$f(x) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{3}{x}$ với $x > 0$ là $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$.

b) Đối với ba số không âm

Ta đã biết $\frac{a+b+c}{3}$ là trung bình cộng của ba số a, b, c. Ta gọi $\sqrt[3]{abc}$ là trung bình nhân của ba số đó. Người ta cũng chứng minh được kết quả tương tự định lí trên cho trường hợp ba số không âm.

> Với mọi $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, ta có
>
> $$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$
>
> Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nói cách khác, *trung bình cộng của ba số không âm lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng. Trung bình cộng của ba số không âm bằng trung bình nhân của chúng khi và chỉ khi ba số đó bằng nhau.*

Ví dụ 6. Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba số dương thì

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Khi nào xảy ra đẳng thức ?

Giải. Vì a, b, c là ba số dương nên

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$) và

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$ $\left(\text{đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}\right)$.

Do đó $\quad (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc}\,.3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 9.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=b=c \\ \frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}. \end{cases}$

Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

H3 *Phát biểu kết quả tương tự hệ quả ở phần a) cho trường hợp ba số dương.*

Câu hỏi và bài tập

1. Chứng minh rằng, nếu $a>b$ và $ab>0$ thì $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

2. Chứng minh rằng nửa chu vi của một tam giác lớn hơn độ dài mỗi cạnh của tam giác đó.

3. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ với mọi số thực a, b, c. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

4. Hãy so sánh các kết quả sau đây :

a) $\sqrt{2000}+\sqrt{2005}$ và $\sqrt{2002}+\sqrt{2003}$ (không dùng bảng số hoặc máy tính) ;

b) $\sqrt{a+2}+\sqrt{a+4}$ và $\sqrt{a}+\sqrt{a+6}$ $\quad(a \geq 0)$.

5. Chứng minh rằng, nếu $a > 0$ và $b > 0$ thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

6. Chứng minh rằng, nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

7. a) Chứng minh rằng $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ với mọi số thực a, b.

b) Chứng minh rằng với hai số thực a, b tuỳ ý, ta có $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$.

8. Chứng minh rằng, nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác thì

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

9. Chứng minh rằng, nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì

$$\frac{a+b}{2} \times \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a^3+b^3}{2}.$$

10. a) Chứng minh rằng, nếu $x \geq y \geq 0$ thì $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$.

b) Chứng minh rằng đối với hai số tuỳ ý a, b, ta có $\frac{|a-b|}{1+|a-b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$.

11. Chứng minh rằng :

a) Nếu a, b là hai số cùng dấu thì $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$;

b) Nếu a, b là hai số trái dấu thì $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$.

12. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x+3)(5-x)$ với $-3 \leq x \leq 5$.

13. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$.

BẤT ĐẲNG THỨC BU-NHI-A-CỐP-XKI[1]

1. Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki đối với hai cặp số thực

Với hai cặp số thực (a,b) và (x,y) ta có

$$(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$.

Chứng minh.

Dễ dàng chứng minh đẳng thức sau :

$$(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2).$$

Mặt khác, do $(ay-bx)^2 \geq 0$ nên

$$(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 \geq (ax+by)^2.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay - bx = 0$, tức là $ay = bx$.

Chú ý. Khi $xy \neq 0$, điều kiện $ay = bx$ còn được viết dưới dạng $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

2. Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki đối với hai bộ ba số thực

Có thể chứng minh kết quả sau :

Với hai bộ ba số thực $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$, ta có

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

Nếu $b_1 b_2 b_3 \neq 0$ thì đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

Ví dụ. Chứng minh rằng nếu $a^2 + 2b^2 + 9c^2 = 3$ thì $a + 2b + 9c \leq 6$.

Giải. Ta có $(a+2b+9c)^2 = (a.1 + \sqrt{2}b.\sqrt{2} + 3c.3)^2 \leq$

$\leq [a^2 + (\sqrt{2}b)^2 + (3c)^2]\,[1^2 + (\sqrt{2})^2 + 3^2] = 12\,(a^2 + 2b^2 + 9c^2) = 36.$

Vì vậy $a + 2b + 9c \leq 6$. □

(1) Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804 – 1889), nhà toán học Nga.

Luyện tập

14. Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba số dương thì

$$\frac{a^4}{b}+\frac{b^4}{c}+\frac{c^4}{a}\geq 3abc.$$

15. Một khách hàng đến một cửa hàng bán hoa quả mua 2 kg cam đã yêu cầu cân hai lần. Lần đầu, người bán hàng đặt quả cân 1 kg lên đĩa cân bên phải và đặt cam lên đĩa cân bên trái cho đến khi cân thăng bằng và lần sau, đặt quả cân 1 kg lên đĩa cân bên trái và đặt cam lên đĩa cân bên phải cho đến khi cân thăng bằng. Nếu cái cân đĩa đó không chính xác (do hai cánh tay đòn dài, ngắn khác nhau) nhưng quả cân là đúng 1 kg thì khách hàng có mua được đúng 2 kg cam hay không ? Vì sao ?

16. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có :

a) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}<1$;

Hướng dẫn. Viết $\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, ...

b) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<2.$

17. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}.$$

18. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b và c, ta có

$$(a+b+c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2).$$

19. Chứng minh rằng nếu a, b, c, d là bốn số không âm thì $\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4\geq abcd.$

20. Chứng minh rằng :

a) Nếu $x^2+y^2=1$ thì $|x+y|\leq\sqrt{2}$; b) Nếu $4x-3y=15$ thì $x^2+y^2\geq 9.$

§ 2 ĐẠI CƯƠNG VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Khái niệm bất phương trình một ẩn

ĐỊNH NGHĨA

> *Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là $\mathcal{D}_f$ và $\mathcal{D}_g$. Đặt $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.*
>
> *Mệnh đề chứa biến có một trong các dạng $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ được gọi là **bất phương trình một ẩn** ; x gọi là **ẩn số** (hay **ẩn**) và $\mathcal{D}$ gọi là **tập xác định** của bất phương trình đó.*
>
> *Số $x_0 \in \mathcal{D}$ gọi là một **nghiệm** của bất phương trình $f(x) < g(x)$ nếu $f(x_0) < g(x_0)$ là mệnh đề đúng.*

Khái niệm "nghiệm" cũng được định nghĩa tương tự cho các bất phương trình dạng

$$f(x) > g(x), f(x) \leq g(x) \text{ và } f(x) \geq g(x).$$

Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm (hay tìm *tập nghiệm*) của bất phương trình đó.

CHÚ Ý

Trong thực hành, ta không cần viết rõ tập xác định $\mathcal{D}$ của bất phương trình mà chỉ cần nêu điều kiện để $x \in \mathcal{D}$. Điều kiện đó gọi là *điều kiện xác định của bất phương trình*, gọi tắt là ***điều kiện của bất phương trình***.

H1 *Biểu diễn tập nghiệm của mỗi bất phương trình sau bởi các kí hiệu khoảng hoặc đoạn :*

a) $-0,5x > 2$; *b)* $|x| \leq 1$.

Dưới đây, chúng ta chỉ nói tới bất phương trình dạng $f(x) < g(x)$. Đối với các bất phương trình dạng $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ và $f(x) \geq g(x)$, ta cũng có các kết quả tương tự.

2. Bất phương trình tương đương

ĐỊNH NGHĨA

*Hai bất phương trình (cùng ẩn) được gọi là **tương đương** nếu chúng có cùng tập nghiệm.*

Nếu $f_1(x) < g_1(x)$ *tương đương với* $f_2(x) < g_2(x)$ *thì ta viết*

$$f_1(x) < g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) < g_2(x).$$

H2 *Các khẳng định sau đây đúng hay sai ? Vì sao ?*

a) $x + \sqrt{x-2} > \sqrt{x-2} \Leftrightarrow x > 0$;

b) $(\sqrt{x-1})^2 \leq 1 \Leftrightarrow x - 1 \leq 1$.

CHÚ Ý

Khi muốn nhấn mạnh hai bất phương trình có cùng tập xác định $\mathcal{D}$ (hay có cùng điều kiện xác định mà ta cũng kí hiệu là $\mathcal{D}$) và tương đương với nhau, ta nói :

– Hai bất phương trình tương đương trên $\mathcal{D}$, hoặc

– Với điều kiện $\mathcal{D}$, hai bất phương trình là tương đương với nhau.

Ví dụ 1. Với điều kiện $x > 2$, ta có $\frac{1}{x-2} > 1 \Leftrightarrow 1 > x - 2$. □

3. Biến đổi tương đương các bất phương trình

Cũng như với phương trình, ở đây chúng ta quan tâm đến các phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của bất phương trình. Ta gọi chúng là các phép ***biến đổi tương đương***. *Phép biến đổi tương đương biến một bất phương trình thành một bất phương trình tương đương với nó*. Chẳng hạn, việc thực hiện các phép biến đổi đồng nhất ở mỗi vế của một bất phương trình và giữ nguyên tập xác định của nó là một phép biến đổi tương đương.

Dưới đây là định lí về một số phép biến đổi tương đương thường dùng. Các hàm số nói trong định lí này đều được cho bởi biểu thức.

ĐỊNH LÍ

> *Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$, $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên $\mathcal{D}$.*
>
> *Khi đó, trên $\mathcal{D}$, bất phương trình $f(x) < g(x)$ tương đương với mỗi bất phương trình :*
>
> *1) $f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$;*
>
> *2) $f(x)h(x) < g(x)h(x)$ nếu $h(x) > 0$ với mọi $x \in \mathcal{D}$;*
>
> *3) $f(x)h(x) > g(x)h(x)$ nếu $h(x) < 0$ với mọi $x \in \mathcal{D}$.*

Chứng minh. Sau đây, ta chỉ chứng minh kết luận 3). Các kết luận khác cũng được chứng minh tương tự.

Nếu x_0 thuộc $\mathcal{D}$ thì $f(x_0)$, $g(x_0)$ và $h(x_0)$ là các giá trị xác định bằng số, hơn nữa, vì $h(x)$ luôn âm nên $h(x_0) < 0$. Do đó, áp dụng tính chất của bất đẳng thức số, ta có

$$f(x_0) < g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0)h(x_0) > g(x_0)h(x_0).$$

Từ đó suy ra rằng hai bất phương trình có cùng tập nghiệm, nghĩa là chúng tương đương với nhau. □

Ví dụ 2

a) Bất phương trình $\sqrt{x} > -2$ tương đương với bất phương trình

$$\sqrt{x} - \sqrt{x} > -2 - \sqrt{x}.$$

b) Bất phương trình $x > -2$ không tương đương với bất phương trình

$$x - \sqrt{x} > -2 - \sqrt{x}.$$

□

H3 *Chứng minh các khẳng định trong ví dụ 2.*

H4 *Các khẳng định sau đây đúng hay sai ? Vì sao ?*

a) $x + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x < 1$; *b)* $\frac{x(x-1)}{x-1} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 2$.

HỆ QUẢ

Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ *có tập xác định* $\mathscr{D}$.

1) Quy tắc nâng lên luỹ thừa bậc ba

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^3 < [g(x)]^3.$$

2) Quy tắc nâng lên luỹ thừa bậc hai

Nếu $f(x)$ *và* $g(x)$ *không âm với mọi* x *thuộc* $\mathscr{D}$ *thì*

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^2 < [g(x)]^2.$$

Tương tự, ta cũng có quy tắc nâng lên luỹ thừa bậc lẻ và nâng lên luỹ thừa bậc chẵn.

H5 *Giải bất phương trình sau đây (bằng cách bình phương hai vế), giải thích rõ các phép biến đổi tương đương đã thực hiện :*

$$|x+1| \le |x|.$$

Câu hỏi và bài tập

21. Một bạn lập luận như sau : Do hai vế của bất phương trình $\sqrt{x-1} < |x|$ luôn không âm nên bình phương hai vế, ta được bất phương trình tương đương $x - 1 < x^2$. Theo em, lập luận trên có đúng không ? Vì sao ?

22. Tìm điều kiện xác định rồi suy ra tập nghiệm của mỗi bất phương trình sau :

a) $\sqrt{x} > \sqrt{-x}$;

b) $\sqrt{x-3} < 1 + \sqrt{x-3}$;

c) $x + \dfrac{1}{x-3} \ge 2 + \dfrac{1}{x-3}$;

d) $\dfrac{x}{\sqrt{x-2}} < \dfrac{2}{\sqrt{x-2}}$.

23. Trong hai bất phương trình sau đây, bất phương trình nào tương đương với bất phương trình $2x - 1 \ge 0$:

$$2x - 1 + \frac{1}{x-3} \ge \frac{1}{x-3} \quad \text{và} \quad 2x - 1 - \frac{1}{x+3} \ge -\frac{1}{x+3}.$$

24. Trong bốn cặp bất phương trình sau đây, hãy chọn ra các cặp bất phương trình tương đương (nếu có) :

a) $x - 2 > 0$ và $x^2(x-2) < 0$;

b) $x - 2 < 0$ và $x^2(x-2) > 0$;

c) $x - 2 \le 0$ và $x^2(x-2) \le 0$;

d) $x - 2 \ge 0$ và $x^2(x-2) \ge 0$.

§ 3 BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Trước đây, chúng ta đã làm quen với *bất phương trình bậc nhất một ẩn*. Đó là bất phương trình có một trong các dạng $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, trong đó a và b là hai số cho trước với $a \neq 0$, x là ẩn.

H1 *Cho bất phương trình* $mx \leq m(m+1)$.

a) Giải bất phương trình với $m = 2$.

b) Giải bất phương trình với $m = -\sqrt{2}$.

Như vậy, nếu a và b là những biểu thức chứa tham số thì tập nghiệm của bất phương trình phụ thuộc vào tham số đó. Việc tìm tập nghiệm của một bất phương trình tuỳ theo các giá trị của tham số gọi là *giải và biện luận* bất phương trình đó.

Dưới đây, chúng ta chủ yếu nói về cách giải và biện luận bất phương trình dạng $ax + b < 0$. Đối với các bất phương trình dạng còn lại, cách giải cũng tương tự.

1. Giải và biện luận bất phương trình dạng $ax + b < 0$

Kết quả giải và biện luận bất phương trình

$$ax + b < 0 \qquad (1)$$

được nêu trong bảng sau đây.

1) Nếu $a > 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$. Vậy tập nghiệm của (1) là $S = \left(-\infty\,;\, -\frac{b}{a}\right)$.

2) Nếu $a < 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$. Vậy tập nghiệm của (1) là $S = \left(-\frac{b}{a}\,;\, +\infty\right)$.

3) Nếu $a = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow 0x < -b$. Do đó :

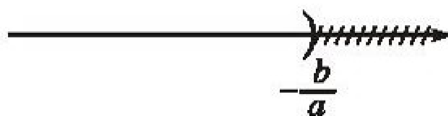
– Bất phương trình (1) vô nghiệm ($S = \varnothing$) nếu $b \geq 0$;

– Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi x ($S = \mathbb{R}$) nếu $b < 0$.

CHÚ Ý

Việc biểu diễn các tập nghiệm trên trục số sẽ rất có ích sau này.

Chẳng hạn, phần không bị gạch ở trên hình 4.2 biểu diễn tập nghiệm của (1) với $a > 0$.



Hình 4.2

Ví dụ 1. Giải và biện luận bất phương trình

$$mx + 1 > x + m^2. \quad (2)$$

Giải. Bất phương trình (2) tương đương với

$$(m - 1)x > m^2 - 1. \quad (3)$$

Ta có

1) Nếu $m > 1$ thì $m - 1 > 0$ nên (3) $\Leftrightarrow x > \dfrac{m^2 - 1}{m - 1} \Leftrightarrow x > m + 1$.

2) Nếu $m < 1$ thì $m - 1 < 0$ nên (3) $\Leftrightarrow x < \dfrac{m^2 - 1}{m - 1} \Leftrightarrow x < m + 1$.

3) Nếu $m = 1$ thì bất phương trình trở thành $0x > 0$ nên nó vô nghiệm.

Kết luận : – Nếu $m > 1$ thì tập nghiệm của (2) là $S = (m + 1\ ; +\infty)$.

– Nếu $m < 1$ thì tập nghiệm của (2) là $S = (-\infty\ ; m + 1)$.

– Nếu $m = 1$ thì tập nghiệm của (2) là $S = \varnothing$. □

H2 *Từ kết quả trên, hãy suy ra tập nghiệm của bất phương trình*

$$mx + 1 \geq x + m^2.$$

Ví dụ 2. Giải và biện luận bất phương trình

$$2mx \geq x + 4m - 3. \quad (4)$$

Giải. Bất phương trình (4) tương đương với

$$(2m - 1)x \geq 4m - 3. \quad (5)$$

1) Nếu $m > \frac{1}{2}$ thì $2m - 1 > 0$ nên (5) $\Leftrightarrow x \geq \frac{4m-3}{2m-1}$.

2) Nếu $m < \frac{1}{2}$ thì $2m - 1 < 0$ nên (5) $\Leftrightarrow x \leq \frac{4m-3}{2m-1}$.

3) Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì (5) trở thành $0x \geq -1$, bởi vậy nó nghiệm đúng với mọi x.

Kết luận : – Nếu $m > \frac{1}{2}$ thì tập nghiệm của (4) là $S = \left[\frac{4m-3}{2m-1} ; +\infty\right)$.

– Nếu $m < \frac{1}{2}$ thì tập nghiệm của (4) là $S = \left(-\infty ; \frac{4m-3}{2m-1}\right]$.

– Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì tập nghiệm của (4) là $S = \mathbb{R}$. □

2. Giải hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Tương tự như hệ phương trình, tập nghiệm của một hệ bất phương trình là giao của tất cả các tập nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Do đó,

Muốn giải hệ bất phương trình một ẩn, ta giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao của các tập nghiệm thu được.

Ví dụ 3. Giải hệ bất phương trình

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} 3x - 5 \leq 0 & (6) \\ 2x + 3 \geq 0 & (7) \\ x + 1 > 0. & (8) \end{cases}$$

Giải. Giải lần lượt từng bất phương trình của hệ, ta được :

Tập nghiệm của (6) là $S_1 = \left(-\infty ; \frac{5}{3}\right]$;

Tập nghiệm của (7) là $S_2 = \left[-\frac{3}{2} ; +\infty\right)$;

Tập nghiệm của (8) là $S_3 = (-1 ; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left(-1\,;\,\frac{5}{3}\right]. \qquad \square$$

Ta cũng có thể trình bày lời giải ví dụ 3 như sau :

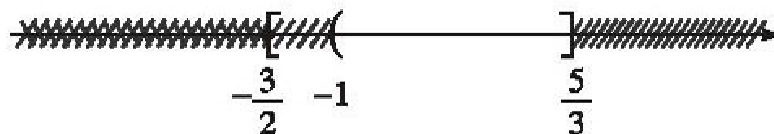
$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{5}{3} \\ x \ge -\dfrac{3}{2} \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \le \frac{5}{3}.$$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là

$$S = \left(-1\,;\,\frac{5}{3}\right]. \qquad \square$$

CHÚ Ý

Để dễ xác định tập nghiệm S, ta biểu diễn các tập nghiệm trên trục số bằng cách gạch đi các điểm (phần) không thuộc tập nghiệm của từng bất phương trình trong hệ, phần còn lại sẽ biểu diễn tập nghiệm cần tìm (h.4.3).



Hình 4.3

H3 *Tìm các giá trị của x để đồng thời xảy ra hai đẳng thức :*

$$|3x + 2| = 3x + 2 \text{ và } |2x - 5| = 5 - 2x.$$

Hướng dẫn. $|A| = A \Leftrightarrow A \ge 0$ và $|B| = -B \Leftrightarrow B \le 0$.

Ví dụ 4. Với giá trị nào của m thì hệ bất phương trình sau có nghiệm ?

$$\begin{cases} x + m \le 0 & (9) \\ -x + 3 < 0. & (10) \end{cases}$$

Giải. Ta có (9) $\Leftrightarrow x \le -m$. Tập nghiệm của (9) là $(-\infty\,;\,-m]$.

(10) $\Leftrightarrow x > 3$. Tập nghiệm của (10) là $(3\,;\,+\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = (-\infty\,;\,-m] \cap (3\,;\,+\infty)$. Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $S \ne \varnothing$, tức là $3 < -m$ hay $m < -3$. $\square$

Câu hỏi và bài tập

25. Giải các bất phương trình :

a) $\frac{x+2}{3} - x + 1 > x + 3$;

b) $\frac{3x+5}{2} - 1 \le \frac{x+2}{3} + x$;

c) $(1-\sqrt{2})x < 3 - 2\sqrt{2}$;

d) $(x+\sqrt{3})^2 \ge (x-\sqrt{3})^2 + 2$.

26. Giải và biện luận các bất phương trình :

a) $m(x-m) \le x - 1$;

b) $mx + 6 > 2x + 3m$;

c) $(x+1)k + x < 3x + 4$;

d) $(a+1)x + a + 3 \ge 4x + 1$.

27. Giải các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} 5x - 2 > 4x + 5 \\ 5x - 4 < x + 2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x + 1 > 3x + 4 \\ 5x + 3 \ge 8x - 9. \end{cases}$

Luyện tập

28. Giải và biện luận các bất phương trình :

a) $m(x-m) > 2(4-x)$;

b) $3x + m^2 \ge m(x+3)$;

c) $k(x-1) + 4x \ge 5$;

d) $b(x-1) \le 2 - x$.

29. Giải các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} \frac{5x+2}{3} \ge 4 - x \\ \frac{6-5x}{13} < 3x + 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} (1-x)^2 > 5 + 3x + x^2 \\ (x+2)^3 < x^3 + 6x^2 - 7x - 5 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \frac{4x-5}{7} < x + 3 \\ \frac{3x+8}{4} > 2x - 5 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x - 1 \le 2x - 3 \\ 3x < x + 5 \\ \frac{5-3x}{2} \le x - 3. \end{cases}$

30. Tìm các giá trị của m để mỗi hệ bất phương trình sau có nghiệm :

a) $\begin{cases} 3x - 2 > -4x + 5 \\ 3x + m + 2 < 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x - 2 \le 0 \\ m + x > 1. \end{cases}$

31. Tìm các giá trị của m để mỗi hệ bất phương trình sau vô nghiệm :

a) $\begin{cases} 2x + 7 < 8x - 1 \\ -2x + m + 5 \ge 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} (x-3)^2 \ge x^2 + 7x + 1 \\ 2m - 5x \le 8. \end{cases}$

§ 4 DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

1. Nhị thức bậc nhất và dấu của nó

Nhiều bài toán dẫn đến việc xét xem một biểu thức $f(x)$ đã cho nhận giá trị âm (hoặc dương) với những giá trị nào của x. Ta gọi việc làm đó là *xét dấu của biểu thức* $f(x)$. Dưới đây, ta sẽ tìm hiểu về nhị thức bậc nhất và dấu của nó.

a) Nhị thức bậc nhất

ĐỊNH NGHĨA

Nhị thức bậc nhất *(đối với x) là biểu thức dạng $ax + b$, trong đó a và b là hai số cho trước với $a \neq 0$.*

Ta đã biết, phương trình $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ có một nghiệm duy nhất $x_0 = -\dfrac{b}{a}$.

Nghiệm đó cũng được gọi là *nghiệm của nhị thức bậc nhất* $f(x) = ax + b$. Nó có vai trò rất quan trọng trong việc xét dấu của nhị thức bậc nhất $f(x)$.

b) Dấu của nhị thức bậc nhất

Đặt $x_0 = -\dfrac{b}{a}$, ta viết nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ như sau

$$f(x) = ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right) = a(x - x_0).$$

Khi $x > x_0$ thì $x - x_0 > 0$ nên dấu của $a(x - x_0)$ trùng với dấu của a.

Khi $x < x_0$ thì $x - x_0 < 0$ nên dấu của $a(x - x_0)$ trái với dấu của a.

Từ đó ta có

ĐỊNH LÍ (về dấu của nhị thức bậc nhất)

> *Nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ cùng dấu với hệ số a khi x lớn hơn nghiệm và trái dấu với hệ số a khi x nhỏ hơn nghiệm của nó.*

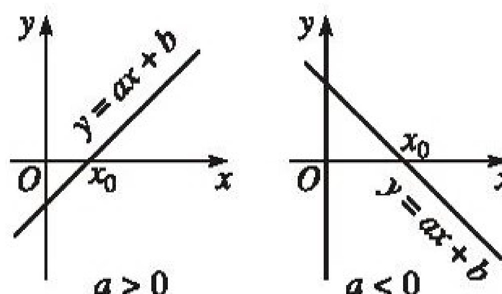
Kết quả của định lí này được tóm tắt trong bảng sau

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

Chẳng hạn nhị thức $f(x) = -x + 1,5$ có hệ số $a = -1$ và nghiệm $x_0 = 1,5$. Do đó, dấu của nó được cho trong bảng sau

x	$-\infty$		$1,5$		$+\infty$
$-x + 1,5$		+	0	−	

Nhị thức đã cho dương khi $x < 1,5$ và âm khi $x > 1,5$.



Hình 4.4

H1 *Hãy giải thích bằng đồ thị (h.4.4) các kết quả của định lí trên.*

2. Một số ứng dụng

a) Giải bất phương trình tích

Ta xét các bất phương trình có thể đưa về một trong các dạng $P(x) > 0$, $P(x) \geq 0$, $P(x) \leq 0$, $P(x) < 0$ với $P(x)$ là tích của những nhị thức bậc nhất.

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

$$(x - 3)(x + 1)(2 - 3x) > 0. \qquad (1)$$

Cách giải. Để giải bất phương trình (1), ta lập bảng xét dấu vế trái của (1).

Đặt $P(x) = (x - 3)(x + 1)(2 - 3x)$.

– Giải phương trình $P(x) = 0$, ta được

$(x - 3)(x + 1)(2 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = \frac{2}{3}$.

– Sắp xếp các giá trị tìm được của x theo thứ tự tăng : -1, $\frac{2}{3}$, 3. Ba số này chia trục số thành bốn khoảng. Ta xác định dấu của $P(x)$ trên từng khoảng bằng cách lập bảng sau đây gọi là *bảng xét dấu của* $P(x)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2-3x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Trong bảng xét dấu, hàng trên cùng ghi lại bốn khoảng được xét của trục số, ba hàng tiếp theo ghi dấu của các nhân tử bậc nhất trên mỗi khoảng (dựa vào định lí về dấu của nhị thức bậc nhất) ; hàng cuối ghi dấu của $P(x)$ trên mỗi khoảng bằng cách lấy "tích" của các dấu cùng cột ở ba hàng trên.

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình (1) là

$$S = (-\infty\,;-1) \cup \left(\frac{2}{3}\,;3\right).$$ □

b) Giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu

Ở đây, ta chỉ xét các bất phương trình có thể đưa về một trong các dạng $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \le 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \ge 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là tích của những nhị thức bậc nhất. Để giải các bất phương trình như vậy, ta lập bảng xét dấu của phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Khi lập bảng xét dấu, nhớ rằng phải ghi tất cả các nghiệm của hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ lên trục số. Trong hàng cuối, tại những điểm mà $Q(x) = 0$, ta dùng kí hiệu || để chỉ tại đó bất phương trình đã cho không xác định.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$\frac{3}{x-2} \le \frac{5}{2x-1}. \qquad (2)$$

Giải. Ta có

$$(2) \quad \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} - \frac{5}{2x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(2x-1) - 5(x-2)}{(x-2)(2x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+7}{(x-2)(2x-1)} \leq 0. \quad (3)$$

Bảng xét dấu vế trái của (3) :

x	$-\infty$		-7		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$x+7$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
Vế trái		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

Từ đó suy ra tập nghiệm của (2) là $S = (-\infty\,;-7] \cup \left(\frac{1}{2}\,;2\right)$. □

c) Giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Một trong những cách giải phương trình hay bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối là sử dụng định nghĩa để khử dấu giá trị tuyệt đối. Ta thường phải xét phương trình hay bất phương trình trong nhiều khoảng (đoạn, nửa khoảng) khác nhau, trên đó mỗi biểu thức nằm trong dấu giá trị tuyệt đối đều có một dấu xác định. Sau đây là một ví dụ đơn giản.

Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$|2x-1| < 3x+5. \quad (4)$$

Giải

1) Với $x < \frac{1}{2}$, ta có

$$(4) \Leftrightarrow 1 - 2x < 3x + 5 \Leftrightarrow 5x > -4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{5}.$$

Kết hợp với điều kiện $x < \frac{1}{2}$, ta được $-\frac{4}{5} < x < \frac{1}{2}$. Vậy tập các nghiệm thoả mãn điều kiện đang xét là khoảng $\left(-\frac{4}{5}\,;\frac{1}{2}\right)$.

2) Với $x \geq \frac{1}{2}$, ta có

$$(4) \Leftrightarrow 2x - 1 < 3x + 5 \Leftrightarrow x > -6.$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$, ta được $x \geq \frac{1}{2}$. Vậy tập các nghiệm thoả mãn điều kiện đang xét là nửa khoảng $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right)$.

Tóm lại, tập nghiệm của bất phương trình (4) là

$$S = \left(-\frac{4}{5} ; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right) = \left(-\frac{4}{5} ; +\infty\right).$$ □

Câu hỏi và bài tập

32. Lập bảng xét dấu của các biểu thức :

a) $\dfrac{4 - 3x}{2x + 1}$;

b) $1 - \dfrac{2 - x}{3x - 2}$;

c) $x(x - 2)^2(3 - x)$;

d) $\dfrac{x(x - 3)^2}{(x - 5)(1 - x)}$.

33. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bậc nhất rồi xét dấu :

a) $-x^2 + x + 6$;

b) $2x^2 - (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$.

34. Giải các bất phương trình :

a) $\dfrac{(3 - x)(x - 2)}{x + 1} \leq 0$;

b) $\dfrac{3}{1 - x} \geq \dfrac{5}{2x + 1}$;

c) $|2x - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - x| > 3x - 2$;

d) $\left|(\sqrt{2} - \sqrt{3})x + 1\right| \leq \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

35. Giải các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} (x - 3)(\sqrt{2} - x) > 0 \\ \dfrac{4x - 3}{2} < x + 3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{2x - 1} \leq \dfrac{1}{3 - x} \\ |x| < 1. \end{cases}$

Luyện tập

36. Giải và biện luận các bất phương trình :

a) $mx + 4 > 2x + m^2$;

b) $2mx + 1 \geq x + 4m^2$;

c) $x(m^2 - 1) < m^4 - 1$;

d) $2(m + 1)x \leq (m + 1)^2 (x - 1)$.

37. Giải các bất phương trình :

a) $(-\sqrt{3}x + 2)(x + 1)(4x - 5) > 0$;

b) $\dfrac{3 - 2x}{(3x - 1)(x - 4)} < 0$;

c) $\dfrac{-3x + 1}{2x + 1} \leq -2$;

d) $\dfrac{x + 2}{3x + 1} \leq \dfrac{x - 2}{2x - 1}$.

38. Giải và biện luận các bất phương trình :

a) $(2x - \sqrt{2})(x - m) > 0$;

b) $\dfrac{\sqrt{3} - x}{x - 2m + 1} \leq 0$.

39. Tìm nghiệm nguyên của mỗi hệ bất phương trình sau :

a) $\begin{cases} 6x + \dfrac{5}{7} > 4x + 7 \\ \dfrac{8x + 3}{2} < 2x + 25 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \dfrac{1}{3} \\ 2(x - 4) < \dfrac{3x - 14}{2} \end{cases}$.

40. Giải các phương trình và bất phương trình :

a) $|x + 1| + |x - 1| = 4$;

b) $\dfrac{|2x - 1|}{(x + 1)(x - 2)} > \dfrac{1}{2}$.

41. Giải và biện luận các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} (x - \sqrt{5})(\sqrt{7} - 2x) > 0 \\ x - m \leq 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{x - 1} < \dfrac{5}{2x - 1} \\ x - m \geq 0. \end{cases}$

§ 5 BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

a) Bất phương trình bậc nhất hai ẩn và miền nghiệm của nó

ĐỊNH NGHĨA

> ***Bất phương trình bậc nhất hai ẩn*** *là bất phương trình có một trong các dạng*
>
> $ax + by + c < 0$, $ax + by + c > 0$, $ax + by + c \le 0$, $ax + by + c \ge 0$,
>
> *trong đó* a, b *và* c *là những số cho trước sao cho* $a^2 + b^2 \neq 0$ *;* x *và* y *là các ẩn.*
>
> *Mỗi cặp số* $(x_0\,;\,y_0)$ *sao cho* $ax_0 + by_0 + c < 0$ *gọi là* ***một nghiệm*** *của bất phương trình* $ax + by + c < 0$.

Nghiệm của các bất phương trình dạng $ax + by + c > 0$, $ax + by + c \le 0$ và $ax + by + c \ge 0$ được định nghĩa tương tự.

Như vậy trong mặt phẳng toạ độ, mỗi nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn được biểu diễn bởi một điểm và tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi một tập hợp điểm. Ta gọi tập hợp điểm ấy là ***miền nghiệm*** của bất phương trình.

Dưới đây, chúng ta sẽ thấy miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một nửa mặt phẳng.

b) Cách xác định miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Việc xác định miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn (hay biểu diễn hình học tập nghiệm của nó) trong mặt phẳng toạ độ dựa trên định lí được thừa nhận sau đây.

ĐỊNH LÍ

> *Trong mặt phẳng toạ độ, đường thẳng* $(d) : ax + by + c = 0$ *chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng ấy (không kể bờ* (d)*) gồm các điểm có toạ độ thoả mãn bất phương trình* $ax + by + c > 0$*, nửa mặt phẳng còn lại (không kể bờ* (d)*) gồm các điểm có toạ độ thoả mãn bất phương trình* $ax + by + c < 0$*.*

Từ định lí, ta suy ra

Nếu $(x_0 ; y_0)$ *là một nghiệm của bất phương trình* $ax + by + c > 0$ *(hay* $ax + by + c < 0$*) thì nửa mặt phẳng (không kể bờ* (d)*) chứa điểm* $M(x_0 ; y_0)$ *chính là miền nghiệm của bất phương trình ấy.*

Vậy để xác định miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$, ta làm như sau :

– Vẽ đường thẳng $(d) : ax + by + c = 0$ *;*

– Xét một điểm $M(x_0 ; y_0)$ *không nằm trên* (d)*.*

Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ *thì nửa mặt phẳng (không kể bờ* (d)*) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình* $ax + by + c < 0$*.*

Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ *thì nửa mặt phẳng (không kể bờ* (d)*) không chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình* $ax + by + c < 0$*.*

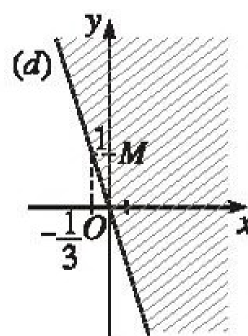
CHÚ Ý

Đối với các bất phương trình dạng $ax + by + c \leq 0$ hoặc $ax + by + c \geq 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả bờ.

Ví dụ 1. Xác định miền nghiệm của bất phương trình $3x + y \leq 0$.

Giải. Trên mặt phẳng toạ độ, đường thẳng $(d) : 3x + y = 0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng.

Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $M(0 ; 1)$. Ta thấy $(0 ; 1)$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ (d) không chứa điểm $M(0 ; 1)$. (Trên hình 4.5, miền nghiệm là nửa mặt phẳng không bị gạch). □



Hình 4.5

H1 *Xác định miền nghiệm của bất phương trình* $x + y > 0$.

2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Dưới đây là một ví dụ về *hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn*

$$(\text{I}) \begin{cases} 3x - y + 3 > 0 \\ -2x + 3y - 6 < 0 \\ 2x + y + 4 > 0. \end{cases}$$

Trong mặt phẳng toạ độ, ta gọi tập hợp các điểm có toạ độ thoả mãn mọi bất phương trình trong hệ là ***miền nghiệm của hệ***. Vậy miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Để xác định miền nghiệm của hệ, ta dùng phương pháp biểu diễn hình học như sau :

– Với mỗi bất phương trình trong hệ, ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ miền còn lại.

– Sau khi làm như trên lần lượt đối với tất cả các bất phương trình trong hệ trên cùng một mặt phẳng toạ độ, miền còn lại không bị gạch chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Ví dụ 2. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (I).

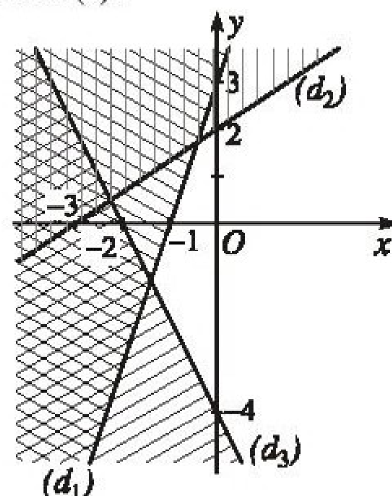
Giải. Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng :

$(d_1) : 3x - y + 3 = 0$;

$(d_2) : -2x + 3y - 6 = 0$;

$(d_3) : 2x + y + 4 = 0$.

Thử trực tiếp ta thấy $(0 ; 0)$ là nghiệm của cả ba bất phương trình. Điều đó có nghĩa là gốc toạ độ thuộc cả ba miền nghiệm của ba bất phương trình của hệ (I). Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không bị gạch trên hình 4.6 (không kể biên) là miền nghiệm của hệ (I). □



Hình 4.6

H2 *Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình*

$$\begin{cases} y - 3x > 0 \\ x - 2y + 5 < 0 \\ 5x + 2y + 10 > 0. \end{cases}$$

3. Một ví dụ áp dụng vào bài toán kinh tế

Vấn đề tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất có liên quan chặt chẽ đến *Quy hoạch tuyến tính*. Đó là một ngành toán học có nhiều ứng dụng trong đời sống và kinh tế. Sau đây là một ví dụ đơn giản.

Bài toán

Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140 kg chất A và 9 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng, có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất, biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II ?

Phân tích bài toán. Nếu sử dụng x tấn nguyên liệu loại I và y tấn nguyên liệu loại II thì theo giả thiết, có thể chiết xuất được $(20x + 10y)$ kg chất A và $(0,6x + 1,5y)$ kg chất B. Theo giả thiết, x và y phải thoả mãn các điều kiện :

$0 \leq x \leq 10$ và $0 \leq y \leq 9$;

$20x + 10y \geq 140$, hay $2x + y \geq 14$;

$0,6x + 1,5y \geq 9$, hay $2x + 5y \geq 30$.

Tổng số tiền mua nguyên liệu là $T(x ; y) = 4x + 3y$.

Bài toán đã cho trở thành : Tìm các số x và y thoả mãn hệ bất phương trình

$$\text{(II)} \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30, \end{cases}$$

sao cho $T(x ; y) = 4x + 3y$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài toán này dẫn đến hai bài toán nhỏ sau :

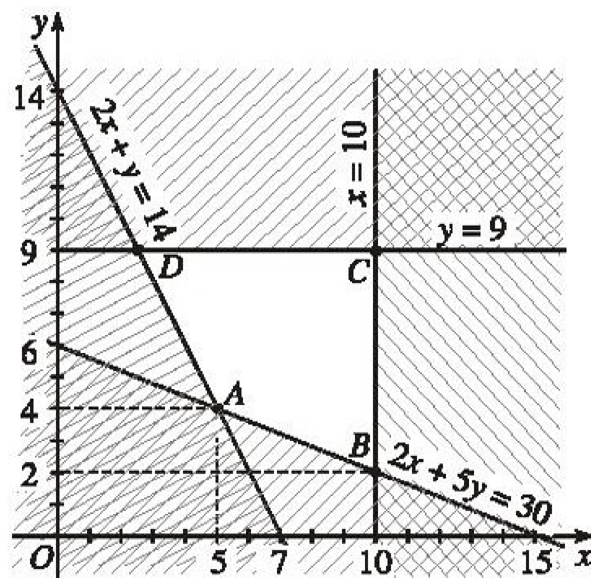
Bài toán 1. Xác định tập hợp (S) các điểm có toạ độ $(x\ ;\ y)$ thoả mãn hệ (II).

Bài toán 2. Trong tất cả các điểm thuộc (S), tìm điểm $(x\ ;\ y)$ sao cho $T(x\ ;\ y)$ có giá trị nhỏ nhất.

• Việc giải bài toán 1 chính là việc xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (II) mà ta đã lập được.

H3 *Kiểm tra lại rằng miền nghiệm (S) của hệ (II) là miền tứ giác $ABCD$ trên hình 4.7 (kể cả biên).*

• Để giải bài toán 2, ta thừa nhận rằng biểu thức $T(x\ ;\ y)$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị ấy đạt được tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$ (xem bài đọc thêm trang 133). Bằng cách tìm toạ độ các đỉnh A, B, C, D rồi so sánh các giá trị tương ứng của $T(x\ ;\ y)$, ta được $T(5\ ;\ 4) = 32$ là giá trị nhỏ nhất.



Hình 4.7

Vậy để chi phí nguyên liệu ít nhất, cần sử dụng 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II (khi đó, chi phí tổng cộng là 32 triệu đồng).

Câu hỏi và bài tập

42. Xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình hai ẩn :

a) $x - 2 + 2(y - 1) > 2x + 4$;

b) $2x - \sqrt{2}\,y + \sqrt{2} - 2 \le 0$.

43. Xác định miền nghiệm của mỗi hệ bất phương trình hai ẩn :

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - 1 > 0 \\ 2(x - 1) + \dfrac{y}{2} < 4\ ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 5y + 20 > 0 \\ y > 0 \\ -y + 5 > \dfrac{x - 3}{3}. \end{cases}$

44. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị prôtêin và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilôgam thịt bò chứa 800 đơn vị prôtêin và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilôgam thịt lợn (heo) chứa 600 đơn vị prôtêin và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn ; giá tiền 1 kg thịt bò là 45 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 35 nghìn đồng. Giả sử gia đình đó mua x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn.

a) Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình rồi xác định miền nghiệm (S) của hệ đó.

b) Gọi T (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn. Hãy biểu diễn T theo x và y.

c) Ở câu a), ta thấy (S) là một miền đa giác. Biết rằng T có giá trị nhỏ nhất tại $(x_0 ; y_0)$ với $(x_0 ; y_0)$ là toạ độ của một trong các đỉnh của (S). Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kilôgam thịt mỗi loại để chi phí là ít nhất ?

Bài đọc thêm

MỘT PHƯƠNG PHÁP TÌM CỰC TRỊ CỦA BIỂU THỨC $P(x ; y) = ax + by$ TRÊN MỘT MIỀN ĐA GIÁC LỒI

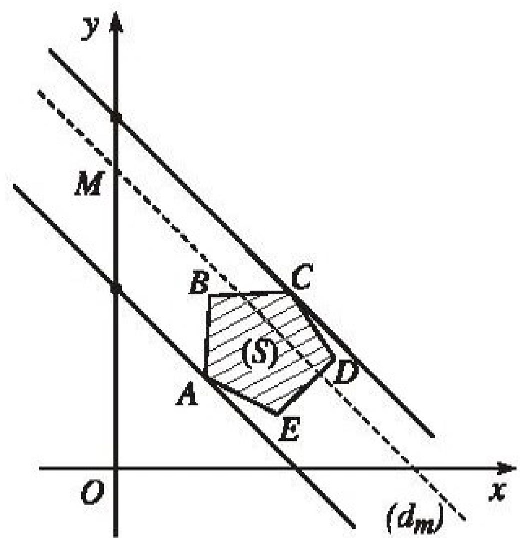
BÀI TOÁN : *Tìm giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của biểu thức* $P(x ; y) = ax + by$ $(b \neq 0)$ *trên một miền đa giác phẳng lồi (kể cả biên).*

Bài toán đó có nghĩa là :

Cho biểu thức $P(x ; y) = ax + by$ $(b \neq 0)$ và một miền đa giác lồi (S), kể cả biên, trong mặt phẳng toạ độ Oxy. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) của $P(x ; y)$ với $(x ; y)$ là toạ độ của các điểm thuộc (S).

Cách giải. Ta luôn có thể giả thiết rằng $b > 0$, bởi vì nếu $b < 0$ thì ta có thể nhân cả hai vế với -1 và bài toán tìm giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) của $P(x ; y)$ sẽ trở thành bài toán tìm giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của $-P(x ; y) = -ax + b'y$, trong đó $b' = -b > 0$.

Tập các điểm $(x ; y)$ để $P(x ; y)$ nhận giá trị p là đường thẳng $ax + by = p$, hay $y = -\frac{a}{b}x + \frac{p}{b}$. Đường thẳng này có hệ số góc bằng $-\frac{a}{b}$ và cắt trục tung tại điểm $M(0 ; m)$ với $m = \frac{p}{b}$ (h.4.8). Kí hiệu đường thẳng này là (d_m). Vì $b > 0$ nên việc tìm giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) của $P(x ; y) = p$ với $(x ; y) \in (S)$ quy về việc tìm giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) của $m = \frac{p}{b}$, tức là tìm điểm M ở vị trí thấp nhất (hay cao nhất) trên trục tung sao cho đường thẳng (d_m) có ít nhất một điểm chung với (S).



Hình 4.8

Từ đó, chú ý rằng (d_m) có hệ số góc bằng $-\frac{a}{b}$ không đổi. Ta đi đến cách làm sau :

- Khi tìm giá trị nhỏ nhất của $P(x ; y)$, ta cho đường thẳng (d_m) chuyển động song song với chính nó từ một vị trí nào đó ở phía dưới miền (S) và đi lên cho đến khi (d_m) lần đầu tiên đi qua một điểm $(x_0 ; y_0)$ nào đó của (S). Khi đó, m đạt giá trị nhỏ nhất và tương ứng với nó là giá trị nhỏ nhất của $P(x ; y)$. Đó là

$$P(x_0 ; y_0) = ax_0 + by_0.$$

- Khi tìm giá trị lớn nhất của $P(x ; y)$, ta cho đường thẳng (d_m) với hệ số góc $-\frac{a}{b}$ chuyển động song song với chính nó từ một vị trí nào đó ở phía trên miền (S) và đi xuống cho đến khi (d_m) lần đầu tiên đi qua một điểm $(x_0 ; y_0)$ nào đó của (S). Khi đó, m đạt giá trị lớn nhất và tương ứng với nó là giá trị lớn nhất của $P(x ; y)$. Đó là

$$P(x_0 ; y_0) = ax_0 + by_0.$$

CHÚ Ý

Qua cách làm trên, ta thấy rằng $P(x ; y)$ đạt giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) tại một đỉnh nào đó của đa giác (S).

Áp dụng cách làm trên vào bài toán 2 nêu trong §5, ta thấy khi (d_m) đi qua đỉnh $A(5 ; 4)$ thì m nhỏ nhất. Điều đó có nghĩa là $T(x ; y)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 5$ và $y = 4$. Khi đó, $T(5 ; 4) = 32$.

Luyện tập

45. Xác định miền nghiệm của các bất phương trình hai ẩn :

a) $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$; b) $(1+\sqrt{3})x-(1-\sqrt{3})y \geq 2$.

46. Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình hai ẩn :

a) $\begin{cases} x-y>0 \\ x-3y \leq -3 \\ x+y>5 ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2y-6 \geq 0 \\ 2(x-1)+\dfrac{3y}{2} \leq 4 \\ x \geq 0. \end{cases}$

47. Gọi (S) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ có toạ độ thoả mãn hệ

$$\begin{cases} 2x-y \geq 2 \\ x-2y \leq 2 \\ x+y \leq 5 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

a) Hãy xác định (S) để thấy rằng đó là một miền tam giác.

b) Trong (S), hãy tìm điểm có toạ độ $(x ; y)$ làm cho biểu thức $f(x ; y) = y - x$ có giá trị nhỏ nhất, biết rằng $f(x ; y)$ có giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của (S).

48. *Bài toán vitamin*

Một nhà khoa học nghiên cứu về tác động phối hợp của vitamin A và vitamin B đối với cơ thể con người. Kết quả như sau :

i) Một người có thể tiếp nhận được mỗi ngày không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B.

ii) Một người mỗi ngày cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B.

iii) Do tác động phối hợp của hai loại vitamin, mỗi ngày, số đơn vị vitamin B không ít hơn $\frac{1}{2}$ số đơn vị vitamin A nhưng không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A.

Giả sử x và y lần lượt là số đơn vị vitamin A và B mà bạn dùng mỗi ngày.

a) Gọi c (đồng) là số tiền vitamin mà bạn phải trả mỗi ngày. Hãy viết phương trình biểu diễn c dưới dạng một biểu thức của x và y, nếu giá một đơn vị vitamin A là 9 đồng và giá một đơn vị vitamin B là 7,5 đồng.

b) Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện i), ii), và iii) thành một hệ bất phương trình rồi xác định miền nghiệm (S) của hệ bất phương trình đó.

c) Tìm phương án dùng hai loại vitamin A và B thoả mãn các điều kiện trên để số tiền phải trả là ít nhất, biết rằng c đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của miền nghiệm (S).



VÀI NÉT VỀ LỊCH SỬ QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Từ thời cổ đại, khi thực hiện các công việc của mình, loài người đã luôn hướng tới cách làm tốt nhất trong các cách làm có thể được (tìm phương án tối ưu trong các phương án). Khi toán học phát triển, người ta đã mô hình hoá toán học các việc cần làm, nghĩa là biểu thị các mục tiêu cần đạt được, các yêu cầu hay các điều kiện cần thoả mãn bằng ngôn ngữ toán học để tìm lời giải tối ưu cho nó. Từ đó, hình thành nên các bài toán tối ưu.

Quy hoạch tuyến tính là lĩnh vực toán học nghiên cứu các bài toán tối ưu với hữu hạn biến (ẩn), trong đó, mục tiêu và các điều kiện ràng buộc được biểu thị bằng các hàm số, các phương trình hay bất phương trình tuyến tính (bậc nhất).



Kup-man, Đan-dich và Kan-to-rô-vich ở Lúc-xăm-bua năm 1976.

Có thể nói, người đầu tiên quan tâm đến *Quy hoạch tuyến tính* là L. V. Kan-to-rô-vich (Leonid Vitalyevich Kantorovich, 1912 – 1986). Trong cuốn "Các phương pháp toán học trong tổ chức và kế hoạch hoá sản xuất" (NXB Đại học Quốc gia Lê-nin-grát, 1939), ông đã nêu bật vai trò của một lớp bài toán *Quy hoạch tuyến tính* và đề xuất thuật toán sơ bộ để giải chúng. Tuy nhiên, Quy hoạch tuyến tính chỉ được nhiều người biết đến vào năm 1947, khi G.B. Đan-dich (George Bernard Dantzig, 1914 – 2005) công bố thuật toán đơn hình để giải các bài toán *Quy hoạch tuyến tính.* Cũng năm đó, T. C. Kup-man (Tjalling Charles Koopmans, 1910 – 1985) đã chỉ ra rằng *Quy hoạch tuyến tính* là công cụ tuyệt vời để phân tích lí thuyết kinh tế cổ điển.

Năm 1975, Kan-to-rô-vich và Kup-man đã được Viện Hàn lâm Hoàng gia Thuỵ Điển trao giải thưởng Nô-ben về khoa học kinh tế.

Ngày nay, trong thời đại máy tính điện tử, *Quy hoạch tuyến tính* vẫn được tiếp tục nghiên cứu nhằm tìm ra các thuật toán tốt hơn.

§ 6 DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

1. Tam thức bậc hai

ĐỊNH NGHĨA

Tam thức bậc hai *(đối với x) là biểu thức dạng* $ax^2 + bx + c$*, trong đó a, b, c là những số cho trước với* $a \neq 0$.

Theo định nghĩa trên, các biểu thức

$$f(x) = -\sqrt{2}x^2 + 3x + 1,\ g(x) = x^2 - 5 \text{ và } h(x) = \frac{1}{2}x^2$$

là những tam thức bậc hai.

Nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ cũng được gọi là *nghiệm của tam thức bậc hai* $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Các biểu thức $\Delta = b^2 - 4ac$ và $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b = 2b'$ theo thứ tự cũng được gọi là *biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai* $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Trong §4, ta đã xét dấu của nhị thức bậc nhất và áp dụng để giải một số bất phương trình. Trong bài này và các bài tiếp theo của chương, ta sẽ xét dấu của tam thức bậc hai và áp dụng nó để giải các bất phương trình và phương trình bậc hai cũng như một số phương trình và bất phương trình khác.

2. Dấu của tam thức bậc hai

Ta sẽ quan sát đồ thị của hàm số bậc hai để suy ra định lí về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Dấu của $f(x)$ phụ thuộc vào dấu của biệt thức Δ và hệ số a.

Trong từng trường hợp, dấu của $f(x)$ được nêu trong các bảng sau :

1) $\Delta < 0$ (tam thức bậc hai vô nghiệm)

$a > 0$	$a < 0$	*Kết luận*
x: $-\infty$ … $+\infty$ $f(x)$: $+$	x: $-\infty$ … $+\infty$ $f(x)$: $-$	x: $-\infty$ … $+\infty$ $f(x)$: Cùng dấu với a ($af(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$).

2) $\Delta = 0$ $\left(\text{tam thức bậc hai có nghiệm kép } x_0 = -\dfrac{b}{2a}\right)$

$a > 0$	$a < 0$	*Kết luận*
x: $-\infty$ … x_0 … $+\infty$ $f(x)$: $+$ 0 $+$	x: $-\infty$ … x_0 … $+\infty$ $f(x)$: $-$ 0 $-$	x: $-\infty$ … x_0 … $+\infty$ $f(x)$: Cùng dấu với a 0 Cùng dấu với a ($af(x) > 0$ với mọi $x \neq x_0$).

3) $\Delta > 0$ (tam thức bậc hai có hai nghiệm x_1 và x_2 ($x_1 < x_2$))

$a > 0$	$a < 0$	*Kết luận*
x: $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ $f(x)$: $+$ 0 $-$ 0 $+$	x: $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ $f(x)$: $-$ 0 $+$ 0 $-$	x: $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ $f(x)$: Cùng dấu với a 0 Khác dấu với a 0 Cùng dấu với a ($af(x) < 0$ với mọi $x \in (x_1 ; x_2)$, $af(x) > 0$ với mọi $x \in (-\infty ; x_1) \cup (x_2 ; +\infty)$).

Các kết quả trên được phát biểu trong định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ (về dấu của tam thức bậc hai)

> *Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.*
>
> *Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.*
>
> *Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.*
>
> *Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm x_1 và x_2 $(x_1 < x_2)$. Khi đó, $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x nằm trong khoảng $(x_1 ; x_2)$ (tức là với $x_1 < x < x_2$), và $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x nằm ngoài đoạn $[x_1 ; x_2]$ (tức là với $x < x_1$ hoặc $x > x_2$).*

CHÚ Ý

Cũng như khi giải phương trình bậc hai, khi xét dấu tam thức bậc hai, ta có thể dùng biệt thức thu gọn Δ' thay cho Δ và cũng được các kết quả tương tự.

Ví dụ 1. $f(x) = 2x^2 - x + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ vì tam thức $f(x)$ có $\Delta = -7 < 0$ và $a = 2 > 0$. □

Ví dụ 2. Xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = 3x^2 - 8x + 2$.

Giải. Vì $a = 3 > 0$ và $f(x)$ có hai nghiệm $x_1 = \dfrac{4 - \sqrt{10}}{3}$, $x_2 = \dfrac{4 + \sqrt{10}}{3}$ (dễ thấy $x_1 < x_2$) nên $f(x) > 0$ (cùng dấu với a) khi $x \in (-\infty ; x_1) \cup (x_2 ; +\infty)$, và $f(x) < 0$ (trái dấu với a) khi $x \in (x_1 ; x_2)$. □

Cũng có thể ghi kết quả trên trong bảng xét dấu của $f(x)$ như sau :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x) = 3x^2 - 8x + 2$		+	0	−	0	+	

H1 *Xét dấu của các tam thức bậc hai sau :*

a) $f(x) = -2x^2 + 5x + 7$; b) $g(x) = -2x^2 + x\sqrt{5} - 7$; c) $h(x) = 9x^2 - 12x + 4$.

Nhận xét

Từ định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy chỉ có một trường hợp duy nhất trong đó dấu của tam thức không thay đổi (luôn âm hoặc luôn dương), đó là khi $\Delta < 0$. Lúc đó, dấu của tam thức trùng với dấu của hệ số a. Do đó, ta có

$$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

Ví dụ 3. Với những giá trị nào của m thì đa thức $f(x) = (2 - m)x^2 - 2x + 1$ luôn dương ?

Giải. Với $m = 2$ thì $f(x) = -2x + 1$ lấy cả những giá trị âm (chẳng hạn $f(1) = -1$). Do đó, giá trị $m = 2$ không thoả mãn điều kiện đòi hỏi.

Với $m \neq 2$, $f(x)$ là tam thức bậc hai với biệt thức thu gọn $\Delta' = m - 1$. Do đó

$$\forall x, f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - m > 0 \\ \Delta' = m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1.$$

Vậy với $m < 1$ thì đa thức $f(x)$ luôn dương. □

H2 *Với những giá trị nào của* m*, đa thức* $f(x) = (m-1)x^2 + (2m+1)x + m + 1$ *âm với mọi* x *thuộc* $\mathbb{R}$ *?*

Câu hỏi và bài tập

49. Xét dấu các tam thức bậc hai sau :

a) $3x^2 - 2x + 1$;

b) $-x^2 + 4x - 1$;

c) $x^2 - \sqrt{3}x + \dfrac{3}{4}$;

d) $(1-\sqrt{2})x^2 - 2x + 1+\sqrt{2}$.

50. Tìm các giá trị của m để mỗi biểu thức sau luôn dương :

a) $(m^2 + 2)x^2 - 2(m + 1)x + 1$;

b) $(m + 2)x^2 + 2(m + 2)x + m + 3$.

51. Tìm các giá trị của m để mỗi biểu thức sau luôn âm :

a) $-x^2 + 2m\sqrt{2}\,x - 2m^2 - 1$; b) $(m-2)x^2 - 2(m-3)x + m - 1$.

52. Chứng minh định lí về dấu của tam thức bậc hai.

Hướng dẫn. Với các trường hợp $\Delta < 0$ và $\Delta = 0$, sử dụng hệ thức đã biết

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \text{ hay } af(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Trường hợp $\Delta > 0$, sử dụng hệ thức đã biết

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{hay} \quad af(x) = a^2(x - x_1)(x - x_2),$$

trong đó x_1 và x_2 là hai nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$.

§ 7 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Định nghĩa và cách giải

> ***Bất phương trình bậc hai*** *(ẩn x) là bất phương trình có một trong các dạng $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.*

Cách giải. Để giải bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

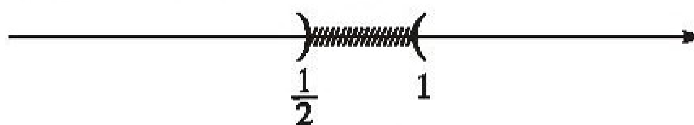
$$2x^2 - 3x + 1 > 0. \qquad (1)$$

Giải. Tam thức bậc hai $2x^2 - 3x + 1$ có hai nghiệm $x_1 = \dfrac{1}{2}$ và $x_2 = 1$ và có hệ số $a = 2 > 0$ nên

$$2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \text{ hoặc } x > 1.$$

Vậy tập nghiệm của (1) là $\left(-\infty \ ; \ \dfrac{1}{2}\right) \cup (1 \ ; \ +\infty)$.

Ta biểu diễn tập nghiệm của (1) trên trục số (h.4.9). □



Hình 4.9

H1 *Tìm tập nghiệm của các bất phương trình sau :*

a) $x^2 + 5x + 4 < 0$; b) $-3x^2 + 2\sqrt{3}x < 1$; c) $4x - 5 \le \dfrac{7}{3}x^2$.

2. Bất phương trình tích và bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$\frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 5x + 6} \ge 0.$$

Giải. Ta xét dấu của biểu thức

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 5x + 6}.$$

Tử thức là tam thức bậc hai có hai nghiệm -2 và $\dfrac{1}{2}$.

Mẫu thức là tam thức bậc hai có hai nghiệm 2 và 3.

Dấu của $f(x)$ được cho trong bảng sau

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		2		3		$+\infty$
$2x^2 + 3x - 2$		+	0	−	0	+	|	+	|	+	
$x^2 - 5x + 6$		+	|	+	|	+	0	−	0	+	
$f(x)$		+	0	−	0	+	||	−	||	+	

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$(-\infty\,;-2]\cup\left[\frac{1}{2}\,;2\right)\cup(3\,;+\infty).$$ □

H2 *Giải bất phương trình*

$$(4-2x)(x^2+7x+12)<0.$$

Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$\frac{2x^2-16x+27}{x^2-7x+10}\le 2.$$

Giải. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x^2-16x+27}{x^2-7x+10}-2\le 0. \qquad (1)$$

Ta có

$$(1)\Leftrightarrow \frac{2x^2-16x+27-2\left(x^2-7x+10\right)}{x^2-7x+10}\le 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+7}{x^2-7x+10}\le 0.$$

Dấu của $f(x)=\dfrac{-2x+7}{x^2-7x+10}$ được cho trong bảng sau đây.

x	$-\infty$		2		$\frac{7}{2}$		5		$+\infty$
$-2x+7$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$x^2-7x+10$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$\left(2\,;\frac{7}{2}\right]\cup(5\,;+\infty).$$ □

3. Hệ bất phương trình bậc hai

Ví dụ 4. Giải hệ bất phương trình

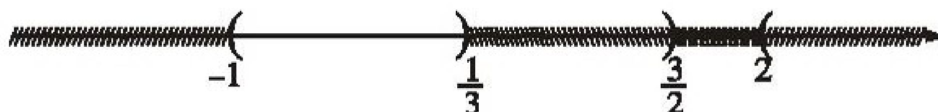
$$\text{(I)}\ \begin{cases}3x^2-7x+2>0\\ -2x^2+x+3>0.\end{cases}$$

Cách giải. Muốn giải hệ bất phương trình bậc hai một ẩn, ta giải riêng từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao của các tập nghiệm tìm được.

Bất phương trình thứ nhất có tập nghiệm $S_1 = \left(-\infty ; \frac{1}{3}\right) \cup (2 ; +\infty)$.

Bất phương trình thứ hai có tập nghiệm $S_2 = \left(-1 ; \frac{3}{2}\right)$.

Muốn tìm $S_1 \cap S_2$, ta có thể biểu diễn các tập này trên trục số bằng cách lần lượt gạch bỏ các phần không thuộc S_1 và các phần không thuộc S_2. Phần còn lại không bị gạch là $S = S_1 \cap S_2$ (h.4.10).



Hình 4.10

Từ đó suy ra tập nghiệm của hệ là $S = \left(-1 ; \frac{1}{3}\right)$.

Trong thực hành, bài giải ví dụ 4 thường được trình bày như sau.

Giải. Ta có

$$(\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \text{ hoặc } x > 2 \\ -1 < x < \frac{3}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < \frac{1}{3}.$$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là khoảng $\left(-1 ; \frac{1}{3}\right)$. □

H3 *Giải hệ bất phương trình*

$$\begin{cases} 2x + 1 > 5 \\ 2x^2 - 9x + 7 \le 0. \end{cases}$$

Ví dụ 5. Tìm các giá trị của m để bất phương trình sau vô nghiệm

$$(m - 2)x^2 + 2(m + 1)x + 2m > 0.$$

Giải. Đặt $f(x) = (m - 2)x^2 + 2(m + 1)x + 2m$.

Bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $f(x) \le 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Với $m = 2$, ta có $f(x) = 6x + 4$. Khi đó, $f(x) \le 0 \Leftrightarrow x \le -\dfrac{2}{3}$.

Giá trị $m = 2$ không thoả mãn điều kiện đòi hỏi.

Với $m \ne 2$, ta có $f(x) \le 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta' \le 0, \\ m - 2 < 0. \end{cases}$

Thay $\Delta' = (m+1)^2 - 2m(m-2) = -m^2 + 6m + 1$ vào hệ trên, ta có

$$\begin{cases} -m^2 + 6m + 1 \le 0 \\ m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 3 - \sqrt{10} \text{ hoặc } m \ge 3 + \sqrt{10} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 3 - \sqrt{10}.$$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi

$$m \le 3 - \sqrt{10}.$$

□

Câu hỏi và bài tập

53. Giải các bất phương trình sau :

a) $-5x^2 + 4x + 12 < 0$;

b) $16x^2 + 40x + 25 < 0$;

c) $3x^2 - 4x + 4 \ge 0$;

d) $x^2 - x - 6 \le 0$.

54. Giải các bất phương trình sau :

a) $\dfrac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 5x + 4} > 0$;

b) $\dfrac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \le -1$;

c) $(2x + 1)(x^2 + x - 30) \ge 0$;

d) $x^4 - 3x^2 \le 0$.

55. Tìm các giá trị của m để mỗi phương trình sau có nghiệm :

a) $(m - 5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$;

b) $(m + 1)x^2 + 2(m - 1)x + 2m - 3 = 0$.

56. Giải các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 4x^2 - 5x - 6 \le 0 \\ -4x^2 + 12x - 5 < 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 \le 0 \\ -x^2 - 3x + 10 \ge 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x^2 + x - 6 > 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 > 0. \end{cases}$

Luyện tập

57. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm

$$x^2 + (m - 2)x - 2m + 3 = 0.$$

58. Chứng minh rằng các phương trình sau vô nghiệm dù m lấy bất kì giá trị nào :

a) $x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + m + 3 = 0$; b) $(m^2 + 1)x^2 + 2(m+2)x + 6 = 0$.

59. Tìm các giá trị của m để bất phương trình

$$(m-1)x^2 - 2(m+1)x + 3(m-2) > 0$$

nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

60. Giải các bất phương trình sau :

a) $\dfrac{x^4 - x^2}{x^2 + 5x + 6} \leq 0$; b) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 4} < \dfrac{1}{x^2 - 7x + 10}$.

61. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

a) $y = \sqrt{(2x+5)(1-2x)}$; b) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 + 3x + 1}}$.

62. Giải các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 3x + 4 \\ x^2 - 7x + 10 \leq 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x^2 + 9x - 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ (x-1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0. \end{cases}$

63. Tìm các giá trị của a sao cho với mọi x, ta luôn có

$$-1 \leq \frac{x^2 + 5x + a}{2x^2 - 3x + 2} < 7.$$

64. Tìm các giá trị của m để hệ bất phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 15 < 0 \\ (m+1)x \geq 3. \end{cases}$$

§ 8 MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

1. Phương trình và bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Ví dụ 1. Giải bất phương trình $x^2 - x + |3x - 2| > 0$.

Giải. Trước hết, ta bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Nếu $3x - 2 \geq 0$ thì $x^2 - x + |3x - 2| = x^2 - x + (3x - 2) = x^2 + 2x - 2$;

Nếu $3x - 2 < 0$ thì $x^2 - x + |3x - 2| = x^2 - x - (3x - 2) = x^2 - 4x + 2$.

Do đó, bất phương trình đã cho tương đương với :

$$\text{(I)} \begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 2 > 0 \end{cases} \text{ hoặc (II)} \begin{cases} 3x - 2 < 0 \\ x^2 - 4x + 2 > 0. \end{cases}$$

Nói cách khác, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là hợp các tập nghiệm của hai hệ bất phương trình (I) và (II).

Ta có

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{2}{3} \\ x < -1 - \sqrt{3} \text{ hoặc } x > -1 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > -1 + \sqrt{3}.$$

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{2}{3} \\ x < 2 - \sqrt{2} \text{ hoặc } x > 2 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < 2 - \sqrt{2}.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty\ ;\ 2 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{3}\ ;\ +\infty)$. □

H1 *Giải phương trình* $|x^2 - 8x + 15| = x - 3$.

2. Phương trình và bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn bậc hai

Khi giải phương trình hoặc bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn bậc hai, ta thực hiện một số phép biến đổi tương đương để đưa nó về một phương trình hoặc bất phương trình không còn chứa ẩn trong dấu căn bậc hai. Trong quá trình biến đổi cần lưu ý :

– Nêu các điều kiện xác định của phương trình hoặc bất phương trình và nêu điều kiện của nghiệm (nếu có) ;

– Chỉ bình phương hai vế của phương trình hoặc bất phương trình khi cả hai vế đều không âm.

Gộp các điều kiện đó với phương trình hoặc bất phương trình mới nhận được, ta có một hệ phương trình hoặc bất phương trình tương đương với phương trình hoặc bất phương trình đã cho (tức là phương trình hoặc bất phương trình đã cho và hệ thu được có cùng tập nghiệm).

Ở đây, ta chỉ xét một số ví dụ đơn giản.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 24x + 22} = 2x + 1.$

Phân tích. Điều kiện xác định của phương trình đã cho là

$$3x^2 + 24x + 22 \geq 0. \quad (1)$$

Dễ thấy nghiệm của phương trình đã cho phải thoả mãn điều kiện

$$2x + 1 \geq 0. \quad (2)$$

Với các điều kiện (1) và (2), phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$3x^2 + 24x + 22 = (2x + 1)^2. \quad (3)$$

Hiển nhiên (3) kéo theo (1). Do đó, nghiệm của phương trình đã cho là nghiệm của phương trình (3) thoả mãn bất phương trình (2). Nói một cách khác, phương trình đã cho tương đương với hệ gồm bất phương trình (2) và phương trình (3).

Sau đây là bài giải ví dụ 2.

Giải. Phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\text{(I)} \begin{cases} 2x+1 \geq 0, \\ 3x^2 + 24x + 22 = (2x+1)^2. \end{cases}$$

Ta có

$$(\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2}, \\ x^2 - 20x - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2}, \\ x = -1 \text{ hoặc } x = 21 \end{cases} \Leftrightarrow x = 21.$$

Nghiệm của phương trình đã cho là $x = 21$. □

H2 *Giải phương trình* $\sqrt{x^2 + 56x + 80} = x + 20$.

Ví dụ 3. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < x - 2$.

Phân tích. Điều kiện xác định của bất phương trình đã cho là

$$x^2 - 3x - 10 \geq 0. \qquad (1)$$

Dễ thấy nghiệm của bất phương trình đã cho phải thoả mãn điều kiện

$$x - 2 > 0. \qquad (2)$$

Với hai điều kiện (1) và (2), bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$x^2 - 3x - 10 < (x - 2)^2. \qquad (3)$$

Như vậy, bất phương trình đã cho tương đương với hệ gồm ba bất phương trình (1), (2) và (3).

Sau đây là bài giải ví dụ 3.

Giải. Bất phương trình đã cho tương đương với hệ

$$(\text{I}) \begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x - 10 < (x - 2)^2. \end{cases}$$

Ta có

$$(\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \text{ hoặc } x \geq 5 \\ x > 2 \\ x < 14 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq x < 14.$$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là [5 ; 14). □

H3 *Giải bất phương trình* $\sqrt{x^2 - 2x - 15} < x - 3$.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$.

Phân tích. Điều kiện xác định của bất phương trình đã cho là

$$x^2 - 4x \geq 0. \qquad (1)$$

Để khử dấu căn chứa ẩn, ta xét hai trường hợp :

Trường hợp 1

$$x - 3 < 0. \qquad (2)$$

Hiển nhiên, nghiệm chung của (1) và (2) là nghiệm của bất phương trình đã cho. Nói một cách khác, trong trường hợp này, bất phương trình đã cho tương đương với hệ gồm hai bất phương trình (1) và (2).

Trường hợp 2

$$x - 3 \geq 0. \qquad (3)$$

Với các điều kiện (1) và (3), bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$x^2 - 4x > (x - 3)^2. \qquad (4)$$

Hiển nhiên (4) kéo theo (1). Do đó, nghiệm chung của hai bất phương trình (3) và (4) là nghiệm của bất phương trình đã cho. Nói cách khác, trong trường hợp này, bất phương trình đã cho tương đương với hệ gồm hai bất phương trình (3) và (4).

Sau đây là bài giải ví dụ 4.

Giải. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\text{(I) } \begin{cases} x^2 - 4x \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \text{ hoặc (II) } \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x > (x - 3)^2. \end{cases}$$

Ta có

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \text{ hoặc } x \geq 4 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0.$$

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x > \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{9}{2}.$$

Nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$x \leq 0 \text{ và } x > \frac{9}{2}.$$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty ; 0] \cup \left(\dfrac{9}{2} ; +\infty\right)$. □

H4 *Giải bất phương trình* $\sqrt{x^2 - 1} > x + 2$.

Câu hỏi và bài tập

65. Giải các phương trình và bất phương trình sau :

a) $\left|x^2 - 5x + 4\right| = x^2 + 6x + 5$;

b) $|x - 1| = 2x - 1$;

c) $\left|-x^2 + x - 1\right| \leq 2x + 5$;

d) $\left|x^2 - x\right| \leq \left|x^2 - 1\right|$.

66. Giải các phương trình sau :

a) $\sqrt{2x^2 + 4x - 1} = x + 1$;

b) $\sqrt{4x^2 + 101x + 64} = 2(x + 10)$;

c) $\sqrt{x^2 + 2x} = -2x^2 - 4x + 3$;

d) $\sqrt{(x + 1)(x + 2)} = x^2 + 3x - 4$.

Hướng dẫn. c) Đặt $y = \sqrt{x^2 + 2x}$, $y \geq 0$, ta được phương trình $y = -2y^2 + 3$.

d) Vì $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$ nên đặt $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$, $y \geq 0$, ta được phương trình $y = y^2 - 6$.

67. Giải các bất phương trình :

a) $\sqrt{x^2 + x - 6} < x - 1$;

b) $\sqrt{2x - 1} \leq 2x - 3$;

c) $\sqrt{2x^2 - 1} > 1 - x$;

d) $\sqrt{x^2 - 5x - 14} \geq 2x - 1$.

68. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

a) $y = \sqrt{\left|x^2 + 3x - 4\right| - x + 8}$;

b) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + x + 1}{|2x - 1| - x - 2}}$;

c) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 - 7x + 5} - \dfrac{1}{x^2 + 2x + 5}}$;

d) $y = \sqrt{\sqrt{x^2 - 5x - 14} - x + 3}$.

XÉT DẤU PHÂN THỨC HỮU TỈ BẰNG PHƯƠNG PHÁP KHOẢNG

Biểu thức có dạng $\frac{P(x)}{Q(x)}$, trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là những đa thức, được gọi là một phân thức hữu tỉ.

Người ta chứng minh được rằng : Nếu các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ có các nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$ đôi một khác nhau và $x_1 < x_2 < ... < x_n$ thì trên mỗi khoảng

$$(-\infty ; x_1), (x_1 ; x_2), ..., (x_{n-1}; x_n), (x_n ; +\infty),$$

phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ giữ một dấu không đổi.

Áp dụng điều khẳng định trên, muốn xác định dấu của $\frac{P(x)}{Q(x)}$ trên mỗi khoảng đã nêu, ta chỉ cần tính giá trị của phân thức tại một điểm nào đó của khoảng.

Phương pháp được sử dụng để xét dấu phân thức hữu tỉ trong các ví dụ sau đây được gọi là phương pháp khoảng.

Ví dụ 1. Xét dấu của phân thức hữu tỉ

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 12}.$$

Giải. Tử thức

$$2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 2x(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1) = (2x + 3)(x + 1)(x - 1)$$

có các nghiệm là $-\frac{3}{2}$, -1 và 1.

Mẫu thức là tam thức bậc hai có các nghiệm là -3 và 4.

Ta viết phân thức dưới dạng

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-4)}$$

và sắp xếp các nghiệm của tử thức và mẫu thức của $f(x)$ theo thứ tự tăng dần

$$-3, -\frac{3}{2}, -1, 1, 4.$$

Các nghiệm này chia $\mathbb{R}$ thành sáu khoảng

$$(-\infty ; -3), \left(-3 ; -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{2} ; -1\right), (-1 ; 1), (1 ; 4) \text{ và } (4 ; +\infty).$$

Ta xác định dấu của $f(x)$ trên mỗi khoảng đã nêu.

Ta có $f(0) = \frac{1}{4} > 0$, do đó $f(x) > 0$ trên khoảng $(-1 ; 1)$. Khi x qua điểm 1, chỉ có nhị thức $x - 1$ đổi dấu, các nhị thức khác đều giữ nguyên dấu; do đó $f(x)$ đổi dấu. Vì vậy, $f(x) < 0$ trên khoảng $(1 ; 4)$. Khi x qua điểm -1, chỉ có nhị thức $x + 1$ đổi dấu, do đó $f(x)$ đổi dấu. Vì vậy $f(x) < 0$ trên khoảng $\left(-\frac{3}{2} ; -1\right)$. Dấu của $f(x)$ trên các khoảng còn lại được xác định một cách tương tự và ta được bảng xét dấu sau :

x	$-\infty$		-3		$-\frac{3}{2}$		-1		1		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

□

Ví dụ 2. Xét dấu biểu thức

$$P(x) = (x^2 + 2x + 1)(2x - 1)(x^2 - 5x + 4).$$

Giải. Tam thức bậc hai $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ có nghiệm kép $x = -1$. Nghiệm của nhị thức bậc nhất $2x - 1$ là $\frac{1}{2}$. Nghiệm của tam thức bậc hai $x^2 - 5x + 4$ là 1 và 4. Ta viết biểu thức đã cho dưới dạng

$$P(x) = (x + 1)^2(2x - 1)(x - 1)(x - 4).$$

Các nghiệm của $P(x)$ sắp xếp theo thứ tự tăng dần là

$$-1,\ \frac{1}{2},\ 1 \text{ và } 4.$$

Các nghiệm này chia $\mathbb{R}$ thành năm khoảng

$$(-\infty ; -1),\ \left(-1 ; \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2} ; 1\right),\ (1 ; 4) \text{ và } (4 ; +\infty).$$

Ta xác định dấu của $P(x)$ trên mỗi khoảng đã nêu.

Ta có $P(0) = -4 < 0$. Do đó $f(x) < 0$ trên khoảng $(-1 ; \frac{1}{2})$. Khi x qua điểm $\frac{1}{2}$, chỉ có nhị thức $2x - 1$ đổi dấu. Do đó $P(x)$ đổi dấu và ta có $P(x) > 0$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2} ; 1\right)$. Tương tự, $P(x)$ âm trên khoảng $(1 ; 4)$ và dương trên khoảng $(4 ; +\infty)$.

Nhân tử $(x + 1)^2$ bằng 0 tại điểm $x = -1$, nhưng luôn dương với mọi $x \neq -1$ nên khi x qua điểm -1, $P(x)$ không đổi dấu. Do đó, $P(x) < 0$ trên khoảng $(-\infty ; -1)$. Ta có bảng xét dấu sau :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		4		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

□

Luyện tập

69. Giải các phương trình và bất phương trình sau :

a) $\left|\dfrac{x^2 - 2}{x + 1}\right| = 2$;　　b) $\left|\dfrac{3x + 4}{x - 2}\right| \le 3$;

c) $\left|\dfrac{2x - 3}{x - 3}\right| \ge 1$;　　d) $|2x + 3| = |4 - 3x|$.

70. Giải các bất phương trình sau :

a) $|x^2 - 5x + 4| \le x^2 + 6x + 5$;　　b) $4x^2 + 4x - |2x + 1| \ge 5$.

71. Giải các phương trình sau :

a) $\sqrt{5x^2 - 6x - 4} = 2(x - 1)$;　　b) $\sqrt{x^2 + 3x + 12} = x^2 + 3x$.

72. Giải các bất phương trình sau :

a) $\sqrt{x^2 + 6x + 8} \le 2x + 3$;　　b) $\dfrac{2x - 4}{\sqrt{x^2 - 3x - 10}} > 1$;

c) $6\sqrt{(x - 2)(x - 32)} \le x^2 - 34x + 48$.

Hướng dẫn. c) Đặt $y = \sqrt{(x - 2)(x - 32)} = \sqrt{x^2 - 34x + 64}$.

73. Giải các bất phương trình sau :

a) $\sqrt{x^2 - x - 12} \ge x - 1$;　　b) $\sqrt{x^2 - 4x - 12} > 2x + 3$;

c) $\dfrac{\sqrt{x + 5}}{1 - x} < 1$.

74. Tìm các giá trị của m sao cho phương trình

$$x^4 + (1 - 2m)x^2 + m^2 - 1 = 0$$

a) Vô nghiệm ;

b) Có hai nghiệm phân biệt ;

c) Có bốn nghiệm phân biệt.

75. Tìm các giá trị của a sao cho phương trình

$$(a - 1)x^4 - ax^2 + a^2 - 1 = 0$$

có ba nghiệm phân biệt.

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương IV

76. Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $|a+b| < |1+ab|$ với $|a| < 1, |b| < 1$;

b) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} \geq \dfrac{1}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;

c) $\dfrac{a+b}{1+a+b} \leq \dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b}$ với mọi $a \geq 0, b \geq 0$. Khi nào đẳng thức xảy ra ?

77. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ với $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$. Khi nào có đẳng thức ?

b) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$ với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$. Khi nào có đẳng thức ?

78. Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $f(x) = \left|x + \dfrac{1}{x}\right|$;

b) $g(x) = \dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$.

79. Tìm các giá trị của tham số m sao cho hệ bất phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \dfrac{7}{6}x - \dfrac{1}{2} > \dfrac{3x}{2} - \dfrac{13}{3} \\ m^2x + 1 \geq m^4 - x. \end{cases}$$

80. Với các giá trị nào của m, bất phương trình $(m^2+1)x + m(x+3) + 1 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1 ; 2]$?

81. Giải và biện luận các bất phương trình sau :

a) $a^2x + 1 > (3a-2)x + 3$;

b) $2x^2 + (m-9)x + m^2 + 3m + 4 \geq 0$.

82. Giải các bất phương trình sau :

a) $\dfrac{x-2}{x^2-9x+20} > 0$;

b) $\dfrac{2x^2-10x+14}{x^2-3x+2} \geq 1$.

83. Tìm các giá trị của m sao cho $\mathbb{R}$ là tập nghiệm của mỗi bất phương trình sau :

a) $(m-4)x^2-(m-6)x+m-5\le 0$;

b) $(m^2-1)x^2+2(m+1)x+3>0$.

84. Giải các phương trình sau :

a) $\left|x^2-2x-3\right|=2x+2$;

b) $\sqrt{x^2-4}=2\left(x-\sqrt{3}\right)$.

85. Giải các bất phương trình sau :

a) $\sqrt{x^2-4x-12}\le x-4$;

b) $(x-2)\sqrt{x^2+4}\le x^2-4$;

c) $\sqrt{x^2-8x}\ge 2(x+1)$;

d) $\sqrt{x(x+3)}\le 6-x^2-3x$.

86. Với các giá trị nào của a, các hệ bất phương trình sau có nghiệm ?

a) $\begin{cases} x^2-5x+6<0 \\ ax+4<0 \text{ ;} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x+1<7x-2, \\ x^2-2ax+1\le 0. \end{cases}$

Trong các bài tập từ 87 đến 89, mỗi bài có bốn phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án trả lời đúng, hãy chọn phương án đó.

87. a) Tam thức bậc hai $f(x)=x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-8-5\sqrt{3}$:

(A) Dương với mọi $x\in\mathbb{R}$;

(B) Âm với mọi $x\in\mathbb{R}$;

(C) Âm với mọi $x\in\left(-2-\sqrt{3}\,;1+2\sqrt{3}\right)$;

(D) Âm với mọi $x\in(-\infty\,;1)$.

b) Tam thức bậc hai $f(x)=\left(1-\sqrt{2}\right)x^2+\left(5-4\sqrt{2}\right)x-3\sqrt{2}+6$:

(A) Dương với mọi $x\in\mathbb{R}$;

(B) Dương với mọi $x\in\left(-3\,;\sqrt{2}\right)$;

(C) Dương với mọi $x\in\left(-4\,;\sqrt{2}\right)$;

(D) Âm với mọi $x\in\mathbb{R}$.

c) Tập xác định của hàm số $f(x)=\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)x^2+\left(15-7\sqrt{5}\right)x+25-10\sqrt{5}}$ là

(A) $\mathbb{R}$;

(B) $(-\infty\,;1)$;

(C) $[-5\,;1]$;

(D) $[-5\,;\sqrt{5}]$.

88. a) Tập nghiệm của bất phương trình

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)x^2-2\left(3\sqrt{2}-4\right)x+6\left(2\sqrt{2}-3\right)\le 0$$

là

(A) $\left[-\sqrt{2}\,;3\sqrt{2}\right]$;

(B) $(-\infty\,;1]$;

(C) $[-1\,;+\infty)$;

(D) $[-1\,;3\sqrt{2}]$.

b) Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2+\sqrt{7}\right)x^2+3x-14-4\sqrt{7}\geq 0$ là

(A) $\mathbb{R}$;

(B) $(-\infty\ ;\ -\sqrt{7}\,]\cup[2\ ;+\infty)$;

(C) $[-2\sqrt{2}\ ;\ 5]$;

(D) $(-\infty\ ;\ -\sqrt{7}\,]\cup[1\ ;+\infty)$.

c) Tập nghiệm của bất phương trình

$$\frac{(x-1)\left(x^3-1\right)}{x^2+\left(1+2\sqrt{2}\right)x+2+\sqrt{2}}\leq 0$$

là

(A) $\left(-1-\sqrt{2}\ ;\ -\sqrt{2}\right)$;

(B) $\left(-1-\sqrt{2}\ ;\ 1\right]$;

(C) $\left(-1-\sqrt{2}\ ;-\sqrt{2}\right)\cup\{1\}$;

(D) $[1\ ;+\infty)$.

89. a) Nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+10x-5}=2(x-1)$ là

(A) $x=\dfrac{3}{4}$;

(B) $x=3-\sqrt{6}$;

(C) $x=3+\sqrt{6}$;

(D) $x_1=3+\sqrt{6}$ và $x_2=2$.

b) Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{(x+4)(6-x)}\leq 2(x+1)$ là

(A) $[-2\ ;\ 5]$;

(B) $\left[\dfrac{\sqrt{109}-3}{5}\ ;\ 6\right]$;

(C) $[1\ ;\ 6]$;

(D) $[0\ ;\ 7]$.

c) Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{2(x-2)(x-5)}>x-3$ là

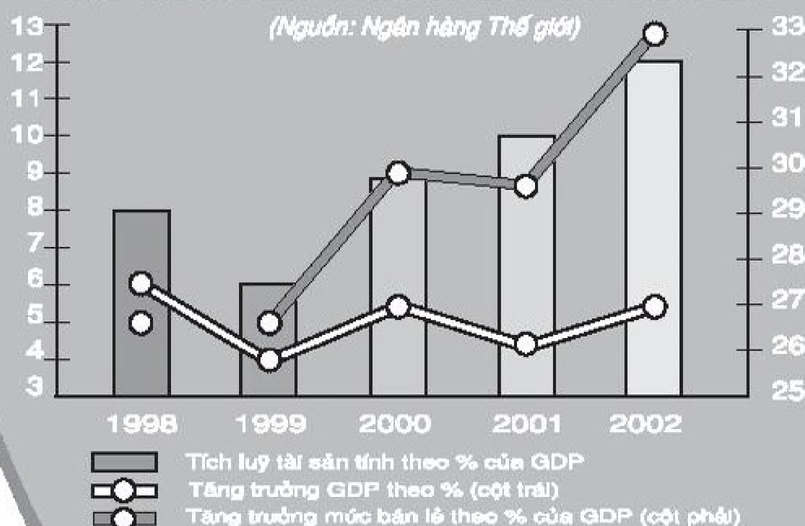
(A) $[-100\ ;\ 2]$;

(B) $(-\infty\ ;\ 1]$;

(C) $(-\infty\ ;\ 2]\cup[6\ ;+\infty)$;

(D) $(-\infty\ ;\ 2]\cup\left(4+\sqrt{5}\ ;\ +\infty\right)$.

Chương 5 THỐNG KÊ



Trong đời sống hiện nay, **Thống kê** đang ngày càng trở nên cần thiết và quan trọng đối với mọi ngành kinh tế xã hội. Thống kê giúp ta phân tích các số liệu một cách khách quan và rút ra nhiều thông tin ẩn chứa trong các số liệu đó. Để hiểu được điều đó, chúng ta cần biết cách trình bày các số liệu thống kê, cách tính các số đặc trưng của các số liệu và hiểu ý nghĩa của chúng. Chắc chắn chúng ta sẽ tìm thấy các ứng dụng của Thống kê ngay trong các hoạt động của trường học.

§ 1 MỘT VÀI KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1. Thống kê là gì ?

Những thông tin dưới dạng số liệu rất phổ biến trong khoa học và đời sống. Khi đọc một tờ báo, nghe một bản tin trên truyền hình,... chúng ta thường bắt gặp những con số thống kê.

Thống kê *là khoa học về các phương pháp thu thập, tổ chức, trình bày, phân tích và xử lí số liệu.*

Thống kê giúp ta phân tích các số liệu một cách khách quan và rút ra các tri thức, thông tin chứa đựng trong các số liệu đó. Trên cơ sở này, chúng ta mới có thể đưa ra được những dự báo và quyết định đúng đắn. Vì thế, thống kê cần thiết cho mọi lực lượng lao động, đặc biệt rất cần cho các nhà quản lí, hoạch định chính sách. Ngay từ đầu thế kỉ XX, nhà khoa học người Anh, Oen (H.G.Well) đã dự báo như sau : *"Trong một tương lai không xa, kiến thức thống kê và tư duy thống kê sẽ trở thành một yếu tố không thể thiếu được trong học vấn phổ thông của mỗi công dân, giống như là khả năng biết đọc biết viết vậy".*

2. Mẫu số liệu

• Ở lớp 7, ta đã làm quen với khái niệm dấu hiệu, đơn vị điều tra và giá trị của dấu hiệu.

Ví dụ. Để điều tra về số học sinh trong mỗi lớp học ở cấp Trung học phổ thông (THPT) của Hà Nội, người điều tra đến một số lớp học và ghi lại sĩ số của mỗi lớp đó. Sau đây là một đoạn trích từ sổ công tác của người điều tra :

STT	Lớp	Số học sinh
1	10*A*	47
2	10*B*	55
3	10*C*	48
4	10*D*	50
5	10*E*	50
6	11*A*	45
7	11*B*	53
8	11*C*	48
9	11*D*	54
10	11*E*	55

Trong ví dụ trên, *dấu hiệu X* là số học sinh của mỗi lớp, *đơn vị điều tra* là một lớp học cấp THPT của Hà Nội, giá trị của dấu hiệu X (kí hiệu x) ở lớp 10A là 47, ở lớp 10B là 55, ...

> *Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra được gọi là một* ***mẫu****. Số phần tử của một mẫu được gọi là* ***kích thước mẫu.*** *Các giá trị của dấu hiệu thu được trên mẫu được gọi là một* ***mẫu số liệu*** *(mỗi giá trị như thế còn gọi là một số liệu của mẫu).*

Nếu các số liệu trong mẫu được viết thành dãy hay thành bảng thì ta còn gọi mẫu số liệu đó là *dãy số liệu* hay *bảng số liệu*.

Trong ví dụ trên, chúng ta có một mẫu là các lớp {10A ; 10B ; 10C ; ... ; 11D ; 11E} và mẫu số liệu là {47 ; 55 ; 48 ; ... ; 54 ; 55}, kích thước mẫu bằng 10.

• Nếu thực hiện điều tra trên mọi đơn vị điều tra thì đó là *điều tra toàn bộ*. Nếu chỉ điều tra trên một mẫu thì đó là *điều tra mẫu*.

H1 *Người điều tra phải kiểm định chất lượng các hộp sữa của một nhà máy chế biến sữa bằng cách mở hộp sữa để kiểm tra. Có thể điều tra toàn bộ hay không ?*

• Điều tra toàn bộ đôi khi không khả thi vì số lượng các đơn vị điều tra quá lớn hoặc vì khi muốn điều tra thì phải phá huỷ đơn vị điều tra. Chúng ta thường chỉ điều tra mẫu và phân tích xử lí mẫu số liệu thu được.

Câu hỏi và bài tập

1. Để điều tra số con trong mỗi gia đình ở huyện A, người ta chọn ra 80 gia đình, thống kê số con của các gia đình đó và thu được mẫu số liệu sau :

2	4	3	2	0	2	2	3	4	5
2	2	5	2	1	2	2	2	3	2
5	2	7	3	4	2	2	2	3	2
3	5	2	1	2	4	4	3	4	3
4	4	4	4	2	5	1	4	4	3
3	4	1	4	4	2	4	4	4	2
3	2	3	4	5	6	2	5	1	4
1	6	5	2	1	1	2	4	3	1.

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì ? Kích thước mẫu là bao nhiêu ?

b) Hãy viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên.

2. Điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kW.h) của 30 gia đình ở một khu phố A, người ta thu được mẫu số liệu sau :

165	85	65	65	70	50	45	100	45	100
100	100	100	90	53	70	141	42	50	150
40	70	84	59	75	57	133	45	65	75.

Cũng hỏi tương tự như trong bài tập 1.

§ 2 TRÌNH BÀY MỘT MẪU SỐ LIỆU

1. Bảng phân bố tần số - tần suất

Ví dụ 1. Khi điều tra về năng suất của một giống lúa mới, điều tra viên ghi lại năng suất (tạ/ha) của giống lúa đó trên 120 thửa ruộng có cùng diện tích 1ha. Xem xét mẫu số liệu này, điều tra viên nhận thấy :

10 thửa ruộng cùng có năng suất 30 ;
20 thửa ruộng cùng có năng suất 32 ;
30 thửa ruộng cùng có năng suất 34 ;
15 thửa ruộng cùng có năng suất 36 ;
10 thửa ruộng cùng có năng suất 38 ;
10 thửa ruộng cùng có năng suất 40 ;
5 thửa ruộng cùng có năng suất 42 ;
20 thửa ruộng cùng có năng suất 44.

Trong mẫu số liệu trên chỉ có tám giá trị khác nhau là : 30 ; 32 ; 34 ; 36 ; 38 ; 40 ; 42 ; 44. Mỗi giá trị này xuất hiện một số lần trong mẫu số liệu. □

Số lần xuất hiện của mỗi giá trị trong mẫu số liệu được gọi là ***tần số*** *của giá trị đó.*

Ta có thể trình bày gọn gàng mẫu số liệu trên trong *bảng phân bố tần số* (gọi tắt là *bảng tần số*) sau đây.

Giá trị (x)	30	32	34	36	38	40	42	44	
Tần số (n)	10	20	30	15	10	10	5	20	$N = 120$

Bảng 1

Nếu muốn biết trong 120 thửa ruộng, có bao nhiêu phần trăm thửa ruộng có năng suất 30, 32, ... ta sẽ phải tính thêm tần suất của mỗi giá trị.

Tần suất *f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số n_i và kích thước mẫu N*

$$f_i = \frac{n_i}{N}.$$

Người ta thường viết tần suất dưới dạng phần trăm.

Bổ sung thêm một hàng tần suất vào bảng 1, ta nhận được *bảng phân bố tần số - tần suất* (gọi tắt là *bảng tần số - tần suất*) sau đây.

Giá trị	30	32	34	36	38	40	42	44	
Tần số	10	20	30	15	10	10	5	20	$N = 120$
Tần suất %	8,3	16,7	25,0	12,5	8,3	8,3	4,2	16,7	

Bảng 2

CHÚ Ý

a) Trên hàng tần số, người ta thường dành một ô để ghi kích thước mẫu N. Kích thước mẫu N bằng tổng các tần số.

b) Có thể viết bảng tần số - tần suất dạng "ngang" (như bảng 2) thành bảng "dọc" (chuyển hàng thành cột như bảng 3).

H1 *Thống kê điểm thi môn Toán trong kì thi vừa qua của 400 em học sinh cho ta bảng sau đây.*

Điểm bài thi	Tần số	Tần suất (%)
0	...	1,50
1	15	3,75
2	43	10,75
3	53	13,25
4	85	21,25
5	...	18,00
6	55	...
7	33	...
8	18	...
9	10	...
10	10	...
	$N = 400$	

Bảng 3

Điền tiếp các số vào các chỗ trống (...) ở cột tần số và cột tần suất trong bảng 3.

2. Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp

Ví dụ 2. Chọn 36 học sinh nam của một trường THPT và đo chiều cao của họ, ta thu được mẫu số liệu sau (đơn vị : cm).

160 161 161 162 162 162 163 163 163 164 164 164 164
165 165 165 165 165 166 166 166 166 167 167 168 168
168 168 169 169 170 171 171 172 172 174.

Để trình bày mẫu số liệu (theo một tiêu chí nào đó) được gọn gàng, súc tích, nhất là khi có nhiều số liệu, ta thực hiện việc *ghép số liệu thành các lớp*. Ở đây, ta ghép các số liệu trên thành năm lớp theo các đoạn có độ dài bằng nhau. Lớp thứ nhất gồm các học sinh có chiều cao nằm trong đoạn [160 ;162], lớp thứ hai gồm các học sinh có chiều cao nằm trong đoạn [163 ;165], ... Khi đó, ta sẽ có một bảng như sau :

Lớp	Tần số
[160 ; 162]	6
[163 ; 165]	12
[166 ; 168]	10
[169 ; 171]	5
[172 ; 174]	3
	$N = 36$

Bảng 4

Trong bảng 4, ***tần số của mỗi lớp*** là số học sinh trong lớp đó.

Bảng 4 được gọi là ***bảng phân bố tần số ghép lớp*** (gọi tắt là *bảng tần số ghép lớp*).

Bổ sung một cột tần suất vào bảng 4, ta nhận được bảng 5 sau

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[160 ; 162]	6	16,7
[163 ; 165]	12	33,3
[166 ; 168]	10	...
[169 ; 171]	5	...
[172 ; 174]	3	...
	$N = 36$	

Bảng 5

Bảng 5 được gọi là ***bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp*** (gọi tắt là *bảng tần số - tần suất ghép lớp*).

H2 *Hãy điền các số vào chỗ trống (...) ở cột tần suất trong bảng 5.*

Trong nhiều trường hợp, ta ghép lớp theo các nửa khoảng sao cho mút bên phải của một nửa khoảng cũng là mút bên trái của nửa khoảng tiếp theo. Chẳng hạn, trong ví dụ 2, ta có thể ghép các số liệu thành năm lớp với các nửa khoảng [159,5 ; 162,5) ; [162,5; 165,5) ; ... . Ta có bảng sau

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[159,5 ; 162,5)	6	16,7
[162,5 ; 165,5)	12	33,3
[165,5 ; 168,5)	10	27,8
[168,5 ; 171,5)	5	...
[171,5 ; 174,5)	3	...
	$N = 36$	

Bảng 6

3. Biểu đồ

Tục ngữ có những câu : "Trăm nghe không bằng một thấy" ; "Một hình ảnh giá trị hơn ngàn lời nói". Để trình bày mẫu số liệu một cách trực quan sinh

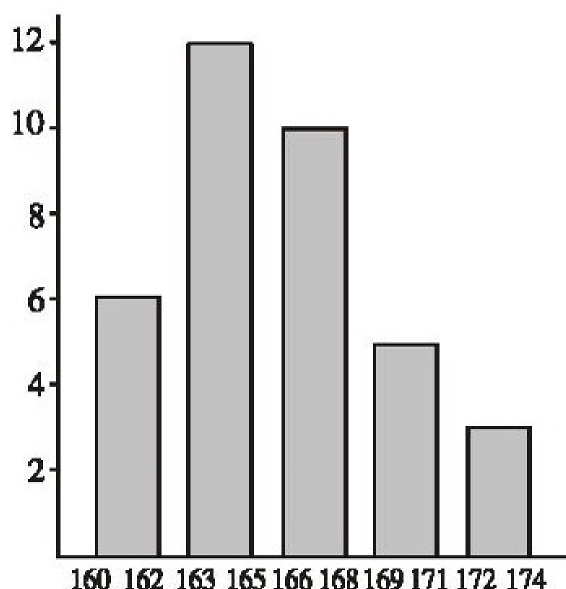
động, dễ nhớ và gây ấn tượng, người ta sử dụng biểu đồ. Sau đây là một số biểu đồ thông dụng nhất.

a) Biểu đồ tần số, tần suất hình cột

Biểu đồ hình cột là một cách thể hiện rất tốt bảng phân bố tần số (hay tần suất) ghép lớp.

Ví dụ 3. Xét bảng phân bố tần số (bảng 4) chiều cao của 36 học sinh trong ví dụ 2. Hình 5.1 là biểu đồ tần số hình cột thể hiện bảng 4 với cách vẽ như sau : Vẽ hai đường thẳng vuông góc.

Trên đường thẳng nằm ngang (dùng làm trục số), ta đánh dấu các đoạn xác định lớp, bắt đầu từ đoạn [160 ; 162] cho tới đoạn [172 ; 174].



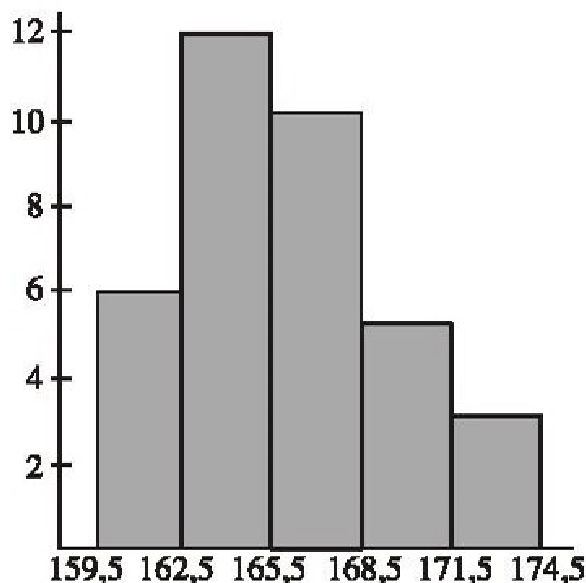
Hình 5.1

Tại mỗi đoạn, ta dựng lên một cột hình chữ nhật với đáy là đoạn đó, còn chiều cao bằng tần số của lớp mà đoạn đó xác định.

Hình thu được đó là ***biểu đồ tần số hình cột***. □

• Đối với cách ghép lớp như ở bảng 6, ta thể hiện bảng phân bố tần số bằng biểu đồ hình cột như hình 5.2. Trong trường hợp này giữa các cột không có "khe hở".

Chúng ta cũng có thể dùng biểu đồ hình cột để thể hiện bảng tần suất ghép lớp gọi là ***biểu đồ tần suất hình cột***. Trong trường hợp này, cột hình chữ nhật sẽ có chiều cao bằng tần suất (tính theo %).



Hình 5.2

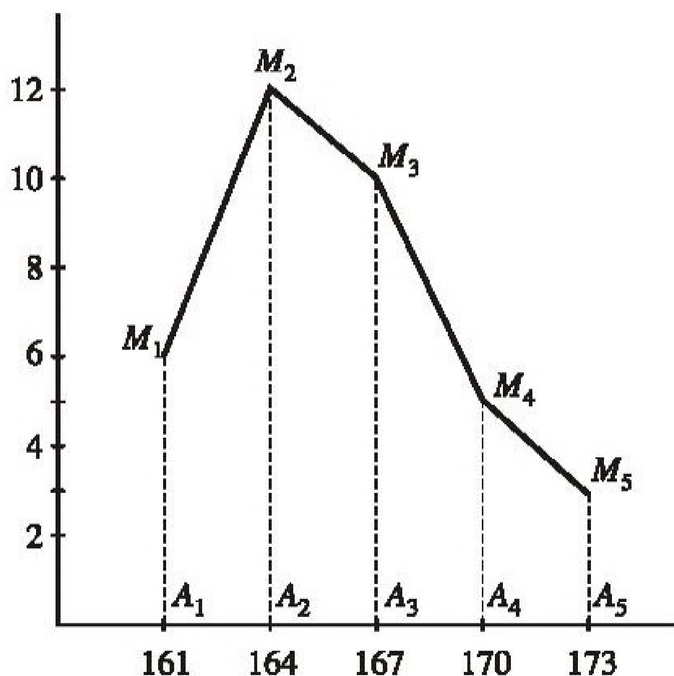
H3 *Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình cột thể hiện bảng 5.*

b) Đường gấp khúc tần số, tần suất

Bảng phân bố tần số ghép lớp cũng có khi được thể hiện bằng một biểu đồ khác gọi là *đường gấp khúc tần số*.

Ví dụ 4. Xét bảng phân bố tần số trong ví dụ 2 (bảng 4). Đường gấp khúc tần số thể hiện bảng 4 được vẽ như sau (h.5.3) :

Ta vẽ hai đường thẳng vuông góc. Trên đường thẳng nằm ngang (dùng làm trục số), ta đánh dấu các điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, ở đó A_i là trung điểm của đoạn (hoặc nửa khoảng) xác định lớp thứ i ($i = 1, 2, ..., 5$). Tại mỗi điểm A_i, ta dựng đoạn thẳng A_iM_i vuông góc với đường thẳng nằm ngang và có độ dài bằng tần số của lớp thứ i ; cụ thể là $A_1M_1 = 6, ..., A_5M_5 = 3$. Vẽ các đoạn thẳng M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5, ta được một đường gấp khúc. Đó là ***đường gấp khúc tần số*** thể hiện bảng 4. □



Hình 5.3

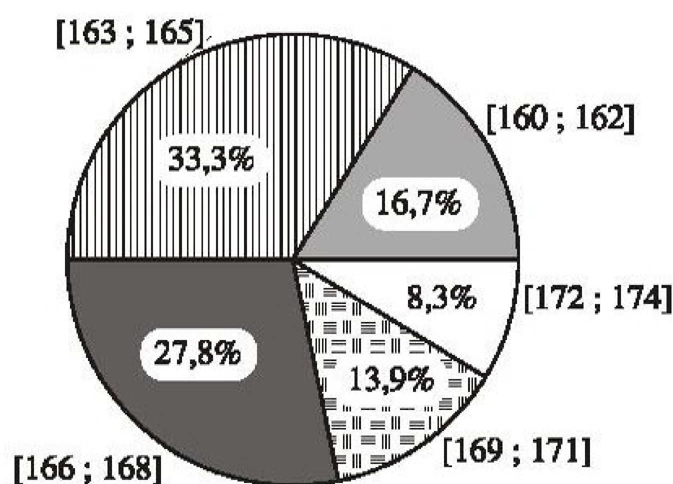
• Nếu độ dài đoạn thẳng A_iM_i được lấy bằng tần suất của lớp thứ i thì khi vẽ các đoạn thẳng M_1M_2, M_2M_3, ..., M_4M_5, ta được một đường gấp khúc gọi là ***đường gấp khúc tần suất***.

H4 *Hãy điền các số vào chỗ trống trong bảng 6 rồi vẽ đường gấp khúc tần suất thể hiện bảng đó.*

c) Biểu đồ tần suất hình quạt

Biểu đồ hình quạt rất thích hợp cho việc thể hiện bảng phân bố tần suất ghép lớp. Hình tròn được chia thành những hình quạt. Mỗi lớp được tương ứng với một hình quạt mà diện tích của nó tỉ lệ với tần suất của lớp đó.

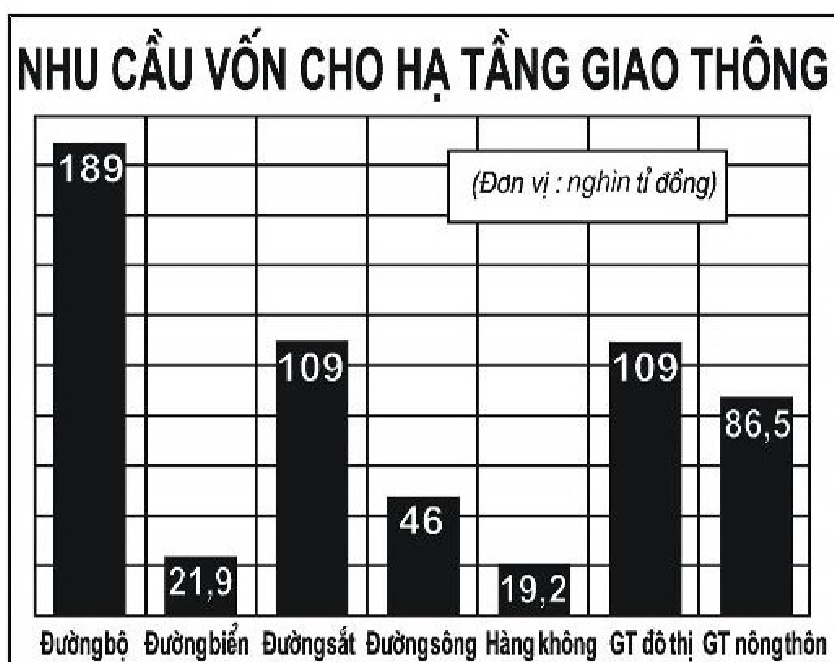
Ví dụ 5. Hình 5.4 là biểu đồ tần suất hình quạt thể hiện bảng 5. Cách vẽ như sau : Lớp thứ nhất [160 ; 162] chiếm $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16,7\%$ của kích thước mẫu. Do đó, hình quạt tương ứng sẽ chiếm $\frac{1}{6}$ hình tròn. Số đo góc của hình quạt này là $\frac{1}{6}$ của 360°, tức là 60°. Ta dùng thước đo góc để dựng hình quạt nói trên. Tương tự, ta dựng hình quạt cho các lớp còn lại. Hình thu được gọi là ***biểu đồ tần suất hình quạt*** thể hiện bảng 5. □

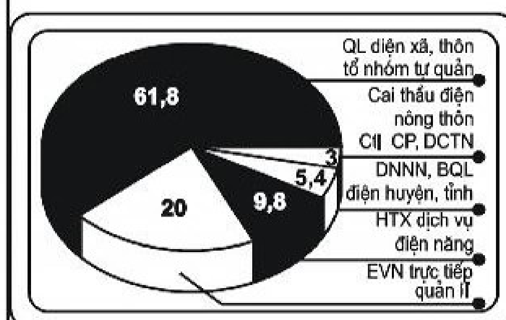


Hình 5.4

CHÚ Ý

Các biểu đồ hình cột và biểu đồ hình quạt được sử dụng không chỉ nhằm minh hoạ bằng hình ảnh bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp mà còn được sử dụng rộng rãi trong việc minh hoạ các số liệu thống kê ở các tình huống khác. Xem các biểu đồ dưới đây trích ra từ *Thời báo kinh tế Việt Nam* 16-12-2002.





Cơ cấu quản lí kinh doanh điện nông thôn (%)

Câu hỏi và bài tập

3. Trong một giải bóng đá học sinh, người ta tổ chức một cuộc thi dự đoán kết quả của 25 trận đáng chú ý nhất. Sau đây là số phiếu dự đoán đúng của 25 trận mà ban tổ chức nhận được :

54 75 121 142 154 159 171 189 203 211 225 247 251
259 264 278 290 305 315 322 355 367 388 450 490.

Hãy lập bảng tần số - tần suất ghép lớp gồm sáu lớp : lớp đầu tiên là đoạn [50 ; 124], lớp thứ hai là đoạn [125 ; 199], ... (độ dài mỗi đoạn là 74).

4. Một trạm kiểm soát giao thông ghi tốc độ (km/h) của 30 chiếc xe ô tô đi qua trạm như sau :

53 47 59 66 36 69 83 77 42 57 51 60 78 63 46
63 42 55 63 48 75 60 58 80 44 59 60 75 49 63.

Hãy lập bảng tần số - tần suất ghép lớp (chính xác đến hàng phần nghìn) gồm sáu lớp : lớp đầu tiên là đoạn [36 ; 43], lớp thứ hai là đoạn [44 ; 51], ... (độ dài mỗi đoạn là 7).

5. Điều tra về số đĩa *CD* của 80 gia đình, điều tra viên thu được bảng tần số - tần suất sau :

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[1 ; 10]	5	6,25
[11 ; 20]	29	...
[21 ; 30]	21	...
[31 ; 40]	16	...
[41 ; 50]	7	...
[51 ; 60]	2	...
	$N = 80$	

a) Điền các số vào chỗ trống (...) ở cột tần suất.

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

c) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.

d) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt.

Luyện tập

6. Doanh thu của 50 cửa hàng của một công ti trong một tháng như sau (đơn vị : triệu đồng)

120 121 129 114 95 88 109 147 118 148 128 71 93 67 62
57 103 135 97 166 83 114 66 156 88 64 49 101 79 120
75 113 155 48 104 112 79 87 88 141 55 123 152 60 83
144 84 95 90 27.

a) Dấu hiệu, đơn vị điều tra ở đây là gì ?

b) Lập bảng tần số - tần suất ghép lớp gồm bảy lớp : lớp đầu tiên là nửa khoảng [26,5 ; 48,5), lớp tiếp theo là nửa khoảng [48,5 ; 70,5), ... (độ dài mỗi nửa khoảng là 22).

c) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

7. Một cuộc điều tra 50 nhà nhiếp ảnh nghiệp dư với câu hỏi : "Trong tháng trước anh (chị) sử dụng hết bao nhiêu cuộn phim ?" cho kết quả như sau :

5 3 3 1 4 3 4 3 6 8 4 5 3 4 2 4 7
6 5 9 6 6 6 7 0 11 3 12 4 7 14 0 2 4
4 3 5 15 0 10 4 5 2 3 5 1 8 1 2 12.

a) Dấu hiệu, đơn vị điều tra ở đây là gì ?

b) Lập bảng tần số ghép lớp, với lớp đầu tiên là đoạn [0 ; 2], lớp tiếp theo là đoạn [3 ; 5], ..., lớp cuối cùng là đoạn [15 ; 17] (độ dài mỗi đoạn là 2).

c) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

8. Một thư viện thống kê số người đến đọc sách vào buổi tối trong 30 ngày của tháng vừa qua như sau :

85 81 65 58 47 30 51 92 85 42 55 37 31 82 63
33 44 93 77 57 44 74 63 67 46 73 52 53 47 35.

a) Lập bảng tần số - tần suất ghép lớp (chính xác đến hàng phần trăm), với lớp đầu tiên là đoạn [25 ; 34], lớp tiếp theo là đoạn [35 ; 44], ..., lớp cuối cùng là đoạn [85 ; 94] (độ dài mỗi đoạn là 9).

b) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.

§ 3 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU

Để nhanh chóng nắm bắt được những thông tin quan trọng chứa đựng trong mẫu số liệu, ta đưa ra một vài chỉ số gọi là ***các số đặc trưng của mẫu số liệu***.

1. Số trung bình

• Giả sử ta có một mẫu số liệu kích thước N là $x_1, x_2, ..., x_N$. Ở lớp dưới, ta đã biết *số trung bình* (hay số trung bình cộng) của mẫu số liệu này, kí hiệu là $\overline{x}$, được tính bởi công thức

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}. \qquad (1)$$

Để cho gọn, ta kí hiệu tổng $x_1 + x_2 + ... + x_N$ là $\sum_{i=1}^{N} x_i$ và đọc là "tổng của các x_i với i chạy từ 1 đến N". Với kí hiệu này, công thức (1) được viết gọn là

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i .$$

• Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng một bảng phân bố tần số (bảng 7) :

Giá trị	$x_1\ x_2\ \ ...\ \ x_m$	
Tần số	$n_1\ n_2\ \ ...\ \ n_m$	N

Bảng 7

Khi đó, công thức tính số trung bình (1) trở thành

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_mx_m}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_ix_i, \qquad (2)$$

trong đó n_i là tần số của số liệu x_i, ($i = 1, 2, ..., m$), $\sum_{i=1}^{m} n_i = N$.

• Giả sử mẫu số liệu kích thước N được cho dưới dạng bảng tần số ghép lớp. Các số liệu được chia thành m lớp ứng với m đoạn (bảng 7a) hoặc m lớp ứng với

m nửa khoảng (bảng 7b). Ta gọi trung điểm x_i của đoạn (hay nửa khoảng) ứng với lớp thứ i là ***giá trị đại diện*** của lớp đó.

Lớp	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1 ; a_2]$ $[a_3 ; a_4]$ $\vdots$ $[a_{2m-1} ; a_{2m}]$	x_1 x_2 $\vdots$ x_m	n_1 n_2 $\vdots$ n_m
		$N = \sum_{i=1}^{m} n_i$

Bảng 7a

Lớp	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1 ; a_2)$ $[a_2 ; a_3)$ $\vdots$ $[a_m ; a_{m+1})$	x_1 x_2 $\vdots$ x_m	n_1 n_2 $\vdots$ n_m
		$N = \sum_{i=1}^{m} n_i$

Bảng 7b

Khi đó, số trung bình của mẫu số liệu này được tính xấp xỉ theo công thức

$$\overline{x} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i .$$

Ví dụ 1. Một nhà thực vật học đo chiều dài của 74 lá cây và thu được bảng tần số sau (đơn vị : mm) :

Lớp	Giá trị đại diện	Tần số
[5,45 ; 5,85)	5,65	5
[5,85 ; 6,25)	6,05	9
[6,25 ; 6,65)	6,45	15
[6,65 ; 7,05)	6,85	19
[7,05 ; 7,45)	7,25	16
[7,45 ; 7,85)	7,65	8
[7,85 ; 8,25)	8,05	2
		$N = 74$

Khi đó, chiều dài trung bình của 74 lá này xấp xỉ là

$$\overline{x} \approx \frac{5\ .\ 5,65 + 9\ .\ 6,05 + ... + 8\ .\ 7,65 + 2\ .\ 8,05}{74} \approx 6,80 \text{ (mm)}.$$ □

Ý nghĩa của số trung bình

Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu. Nó là một số đặc trưng quan trọng của mẫu số liệu.

Chẳng hạn, nếu biết rằng thời gian trung bình để điều trị khỏi bệnh A đối với bệnh nhân nam là 5,3 ngày, đối với bệnh nhân nữ là 6,2 ngày thì ta có thể cho rằng nói chung với bệnh A thì bệnh nhân nam chóng bình phục hơn so với bệnh nhân nữ.

Tuy nhiên, khi các số liệu trong mẫu có sự chênh lệch rất lớn đối với nhau thì số trung bình chưa đại diện tốt cho các số liệu trong mẫu.

Ví dụ 2. Một nhóm 11 học sinh tham gia một kì thi. Số điểm thi của 11 học sinh đó được sắp xếp từ thấp đến cao như sau (thang điểm 100) :

0 ; 0 ; 63 ; 65 ; 69 ; 70 ; 72 ; 78 ; 81 ; 85 ; 89.

Số trung bình là

$$\frac{0 + 0 + 63 + ... + 85 + 89}{11} \approx 61,09.$$

Quan sát dãy điểm trên, ta thấy hầu hết các em (9 em) trong nhóm có số điểm vượt số trung bình. Như vậy, số trung bình này không phản ánh đúng trình độ trung bình của nhóm. Trong trường hợp này, có một số đặc trưng khác thích hợp hơn đó là *số trung vị*. □

2. Số trung vị

Giả sử ta có một mẫu số liệu kích thước N được sắp xếp theo thứ tự không giảm. Nếu N là một số lẻ thì số liệu đứng thứ $\frac{N+1}{2}$ (số liệu đứng chính giữa) gọi là ***số trung vị****. Nếu N là một số chẵn, ta lấy trung bình cộng của hai số liệu đứng thứ $\frac{N}{2}$ và $\frac{N}{2}+1$ làm số trung vị.*

Số trung vị được kí hiệu là M_e.

Ví dụ 3. Điều tra về số học sinh trong 28 lớp học, ta được mẫu số liệu sau (sắp xếp theo thứ tự tăng dần) :

38	39	39	40	40	40	40	40	40	41	41	41	42	42
43	43	43	43	44	44	44	44	44	45	45	46	47	47

Số liệu đứng thứ 14 là 42, đứng thứ 15 là 43. Do vậy, số trung vị là

$$M_e = \frac{42+43}{2} = 42{,}5.$$ □

H1

a) Tính số trung vị của mẫu số liệu trong ví dụ 2.
b) Tính số trung bình của mẫu số liệu trong ví dụ 3 và so sánh nó với số trung vị.

CHÚ Ý

Khi các số liệu trong mẫu không có sự chênh lệch quá lớn thì số trung bình và số trung vị xấp xỉ nhau.

H2 *Đo chiều cao của 36 học sinh của một trường, ta có mẫu số liệu sau, sắp xếp theo thứ tự tăng (đơn vị : cm) :*

160	161	161	162	162	162	163	163	163	164	164	164
164	165	165	165	165	165	166	166	166	166	167	167
168	168	168	168	169	169	170	171	171	172	172	174

Tìm số trung vị của mẫu số liệu này.

3. Mốt

Cho một mẫu số liệu dưới dạng bảng phân bố tần số. Ta đã biết giá trị có tần số lớn nhất được gọi là ***mốt*** của mẫu số liệu và kí hiệu là M_o.

Ví dụ 4. Một cửa hàng bán quần áo thống kê số áo sơ mi nam đã bán ra trong một quý theo các cỡ khác nhau và có được bảng tần số sau

Cỡ áo (x)	36	37	38	39	40	41	42
Số áo bán được (n)	13	45	110	184	126	40	5

Điều mà cửa hàng quan tâm nhất là *cỡ áo nào được khách hàng mua nhiều nhất*. Bảng thống kê trên cho thấy cỡ áo mà khách hàng mua nhiều nhất là cỡ 39 (tức là giá trị 39 có tần số lớn nhất). Vậy giá trị 39 là mốt của mẫu số liệu này. □

CHÚ Ý

Một mẫu số liệu có thể có một hay nhiều mốt.

Ví dụ 5. Một cửa hàng bán 6 loại quạt với giá tiền là 100, 150, 300, 350, 400, 500 (đơn vị là nghìn đồng). Số quạt cửa hàng bán ra trong mùa hè vừa qua được thống kê trong bảng tần số sau

Giá tiền (x)	100	150	300	350	400	500
Số quạt bán được (n)	256	353	534	300	534	175

Ta thấy mẫu số liệu trên có hai mốt là 300 nghìn đồng và 400 nghìn đồng. Đó là giá tiền của hai loại quạt được khách hàng mua nhiều nhất. □

4. Phương sai và độ lệch chuẩn

Ví dụ 6. Điểm trung bình từng môn học của hai học sinh An và Bình trong năm học vừa qua được cho trong bảng sau :

Môn	**Điểm của An**	**Điểm của Bình**
Toán	8	8,5
Vật lí	7,5	9,5
Hoá học	7,8	9,5
Sinh học	8,3	8,5
Ngữ văn	7	5
Lịch sử	8	5,5
Địa lí	8,2	6
Tiếng Anh	9	9
Thể dục	8	9
Công nghệ	8,3	8,5
Giáo dục công dân	9	10

H3 *Tính điểm trung bình (không kể hệ số) của tất cả các môn học của An và của Bình. Theo em, bạn nào học khá hơn ?*

Nhìn vào bảng điểm, ta có ngay nhận xét là An học đều các môn, còn Bình thì không. Sự chênh lệch, biến động giữa các điểm của An thì ít, của Bình thì nhiều.

• Để đo mức độ chênh lệch giữa các giá trị của mẫu số liệu so với số trung bình, người ta đưa ra hai số đặc trưng là *phương sai* và *độ lệch chuẩn*.

Giả sử ta có một mẫu số liệu kích thước N là $\{x_1, ..., x_N\}$. ***Phương sai*** *của mẫu số liệu này, kí hiệu là s^2, được tính bởi công thức sau*

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2, \quad (3)$$

trong đó $\overline{x}$ là số trung bình của mẫu số liệu.

Căn bậc hai của phương sai được gọi là ***độ lệch chuẩn****, kí hiệu là s.*

$$s = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}.$$

Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn

Trong công thức (3), ta thấy phương sai là trung bình cộng của bình phương khoảng cách từ mỗi số liệu tới số trung bình. Như vậy, *phương sai và độ lệch chuẩn đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì độ phân tán càng lớn.*

CHÚ Ý

Có thể biến đổi công thức (3) thành

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2.} \quad (4)$$

Sử dụng công thức (4) thuận tiện hơn trong tính toán.

Trở lại ví dụ ở trên, ta hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn điểm các môn học của An và Bình. Trước hết, ta tính các tổng $\sum_{i=1}^{N}x_i$ và $\sum_{i=1}^{N}x_i^2$.

Từ số liệu ở cột điểm của An, ta có

$$\sum_{i=1}^{11}x_i = 89{,}1 \ ; \ \sum_{i=1}^{11}x_i^2 = 725{,}11.$$

Từ số liệu ở cột điểm của Bình, ta có

$$\sum_{i=1}^{11}x_i = 89 \ ; \ \sum_{i=1}^{11}x_i^2 = 750{,}5.$$

Tiếp theo, ta thế các kết quả này vào công thức (4) để tìm s^2.

Phương sai và độ lệch chuẩn điểm các môn học của An là

$$s_A^2 = \frac{725,11}{11} - \left(\frac{89,1}{11}\right)^2 \approx 0,309 \ ; \quad s_A \approx \sqrt{0,3091} \approx 0,556.$$

Phương sai và độ lệch chuẩn điểm các môn học của Bình là

$$s_B^2 = \frac{750,5}{11} - \left(\frac{89}{11}\right)^2 \approx 2,764 \ ; \quad s_B \approx \sqrt{2,764} \approx 1,663.$$

Ta thấy mức độ "học lệch" của Bình so với An được thể hiện qua việc so sánh hai phương sai : Phương sai điểm các môn học của Bình gấp gần 9 (≈ 8,945) lần phương sai điểm các môn học của An. Điều đó phù hợp với nhận xét Bình học lệch hơn An.

Ta cũng có thể so sánh độ học lệch của Bình và An thông qua việc so sánh hai độ lệch chuẩn. □

Việc tính các tổng $\sum_{i=1}^{N} x_i$ và $\sum_{i=1}^{N} x_i^2$ sẽ nhanh chóng nếu dùng máy tính bỏ túi. (Xem bài đọc thêm để được hướng dẫn chi tiết về cách sử dụng máy tính bỏ túi trong tính toán thống kê).

• Nếu số liệu được cho dưới dạng bảng phân bố tần số (bảng 7) thì phương sai được tính bởi công thức

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2.} \qquad (5)$$

Ví dụ 7. Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số sau đây.

Sản lượng (*x*)	20	21	22	23	24	
Tần số (*n*)	5	8	11	10	6	$N = 40$

a) Tìm sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Giải. Trước hết, ta tính

$$\sum_{i=1}^{5} n_i x_i = 884, \ \sum_{i=1}^{5} n_i x_i^2 = 19\,598.$$

a) Sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng là

$$\overline{x} = \frac{884}{40} = 22,1 \text{ (tạ)}.$$

b) Theo công thức (5), ta có phương sai là

$$s^2 = \frac{19\,598}{40} - \left(\frac{884}{40}\right)^2 = 1,54.$$

Độ lệch chuẩn là $s = \sqrt{1,54} \approx 1,24$ (tạ). □

• Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng phân bố tần số ghép lớp. Các số liệu được chia thành m lớp ứng với m đoạn (hoặc nửa khoảng). Gọi x_i là giá trị đại diện của lớp thứ i (xem bảng $7a$, $7b$).

Khi đó, phương sai của mẫu số liệu này có thể tính xấp xỉ theo công thức (5).

Ví dụ 8. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu cho ở ví dụ 1.

Giải. Ta có

$$\sum_{i=1}^{7} n_i x_i = 502,9,$$

$$\sum_{i=1}^{7} n_i x_i^2 = 3443,385.$$

Vậy $s^2 \approx \dfrac{3443,385}{74} - \dfrac{502,9^2}{74^2} \approx 0,347$.

Độ lệch chuẩn là $s \approx \sqrt{0,347} \approx 0,589$ (mm). □

Câu hỏi và bài tập

Trong các bài tập dưới đây, yêu cầu tính số trung bình, số trung vị, phương sai, độ lệch chuẩn (chính xác đến hàng phần trăm).

9. Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Toán (thang điểm là 20). Kết quả được cho trong bảng sau đây.

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	$N = 100$

a) Tính số trung bình.

b) Tính số trung vị và mốt. Nêu ý nghĩa của chúng.

c) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

10. Người ta chia 179 củ khoai tây thành chín lớp căn cứ trên khối lượng của chúng (đơn vị là gam). Ta có bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây.

Lớp	**Tần số**
[10 ; 19]	1
[20 ; 29]	14
[30 ; 39]	21
[40 ; 49]	73
[50 ; 59]	42
[60 ; 69]	13
[70 ; 79]	9
[80 ; 89]	4
[90 ; 99]	2
	$N = 179$

Tính khối lượng trung bình của một củ khoai tây. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

11. Bảng sau đây trích từ sổ theo dõi bán hàng của một cửa hàng bán xe máy.

Số xe bán trong ngày	0	1	2	3	4	5
Tần số	2	13	15	12	7	3

a) Tìm số xe trung bình bán được trong một ngày.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Luyện tập

Trong các bài tập dưới đây, yêu cầu tính số trung bình, số trung vị, phương sai, độ lệch chuẩn chính xác đến hàng phần trăm.

12. Số liệu sau đây cho ta lãi (quy tròn) hàng tháng của một cửa hàng trong năm 2005. Đơn vị là triệu đồng.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	12	15	18	13	13	16	18	14	15	17	20	17

a) Tìm số trung bình, số trung vị.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

13. Một cửa hàng vật liệu xây dựng thống kê số bao xi măng bán ra trong 23 ngày cuối năm 2005. Kết quả như sau :

47 54 43 50 61 36 65 54 50 43 62 59 36 45 45 33 53 67
21 45 50 36 58.

a) Tìm số trung bình, số trung vị.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

14. Số lượng khách đến tham quan một điểm du lịch trong mỗi tháng được thống kê trong bảng sau đây.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số khách	430	560	450	550	760	430	525	110	635	450	800	950

a) Tìm số trung bình, số trung vị.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

15. Trên hai con đường A và B, trạm kiểm soát đã ghi lại tốc độ (km/h) của 30 chiếc ô tô trên mỗi con đường như sau :

Con đường A : 60 65 70 68 62 75 80 83 82 69 73 75 85 72 67
88 90 85 72 63 75 76 85 84 70 61 60 65 73 76.

Con đường B : 76 64 58 82 72 70 68 75 63 67 74 70 79
80 73 75 71 68 72 73 79 80 63 62 71 70
74 69 60 63.

a) Tìm số trung bình, số trung vị, phương sai và độ lệch chuẩn của tốc độ ô tô trên mỗi con đường A, B.

b) Theo em thì xe chạy trên con đường nào an toàn hơn ?

Bài đọc thêm

SỬ DỤNG MÁY TÍNH BỎ TÚI TRONG THỐNG KÊ

Máy tính bỏ túi (MTBT) là công cụ hỗ trợ rất đắc lực cho việc học Thống kê. Nhờ MTBT, Thống kê đã trở nên dễ học và dễ ứng dụng.

Chẳng hạn, đối với máy CASIO *fx - 500MS,* để tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn, chúng ta cần làm trình tự theo các bước sau :

1) Đầu tiên, để vào chế độ tính toán thống kê, ta ấn

MODE 2

2) Giả sử mẫu số liệu là $x_1, x_2, ..., x_n$. Để nhập số liệu, ta ấn

x_1 DT x_2 DT ... x_n DT

Để nhập mẫu số liệu $x_1, x_2, ..., x_n$, trong đó x_i có tần số n_i, $(i = 1, 2, ..., m)$, ta ấn

x_1 [SHIFT] [;] n_1 [DT] x_2 [SHIFT] [;] n_2 [DT] ...

x_m [SHIFT] [;] n_m [DT]

3) Nhập dữ liệu xong, để tính số trung bình $\overline{x}$, ta ấn

[SHIFT] [S – VAR] [1] [=]

4) Để tính độ lệch chuẩn s, ta ấn

[SHIFT] [S – VAR] [2] [=]

5) Để tính phương sai s^2 (lấy bình phương của độ lệch chuẩn), ta ấn tiếp

[x^2] [=]

Ví dụ 1. Tính số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn điểm các môn học của An ở ví dụ 6, §3.

Sau khi thực hiện bước 1, để nhập dữ liệu, ta ấn

2) 8 [DT] 7,5 [DT] ... 9 [DT]

3) Để tính trung bình $\overline{x}$, ta ấn

[SHIFT] [S – VAR] [1] [=]

Kết quả $\overline{x} = 8{,}1$, đó là số trung bình cần tìm.

4) Để tính độ lệch chuẩn s, ta ấn

[SHIFT] [S – VAR] [2] [=]

Kết quả $s \approx 0{,}555959449$, đó là độ lệch chuẩn cần tìm.

5) Để tính phương sai s^2, ta ấn tiếp

[x^2] [=]

Kết quả $s^2 \approx 0{,}309090909$, đó là phương sai cần tìm. □

Ví dụ 2. Tính số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trong ví dụ 7, §3.

Sau khi thực hiện bước 1, để nhập dữ liệu, ta ấn

2) 20 [SHIFT] [;] 5 [DT] 21 [SHIFT] [;] 8 [DT] ... 24 [SHIFT] [;] 6 [DT]

3) Để tính trung bình $\overline{x}$, ta ấn

[SHIFT] [S – VAR] [1] [=]

Kết quả $\overline{x} = 22{,}1$, đó là số trung bình cần tìm.

4) Để tính độ lệch chuẩn s, ta ấn

SHIFT S – VAR 2 =

Kết quả $s \approx 1{,}240967365$, đó là độ lệch chuẩn cần tìm.

5) Để tính phương sai s^2, ta ấn tiếp

x^2 =

Kết quả $s^2 \approx 1{,}54$, đó là phương sai cần tìm. □

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương V

16. Chọn phương án đúng trong bốn phương án trả lời sau đây.

Người ta xếp số cân nặng của 10 học sinh theo thứ tự tăng dần. Số trung vị của mẫu số liệu này là :

(A) Số cân nặng của học sinh thứ năm ;

(B) Số cân nặng của học sinh thứ sáu ;

(C) Số cân nặng trung bình của em thứ năm và thứ sáu ;

(D) Không phải các số trên.

17. Chọn phương án đúng trong bốn phương án trả lời sau đây.

Độ lệch chuẩn là :

(A) Bình phương của phương sai ; (B) Một nửa của phương sai ;

(C) Căn bậc hai của phương sai ; (D) Không phải là các công thức trên.

Trong các bài tập từ 18 đến 21, yêu cầu tính số trung bình, số trung vị, phương sai, độ lệch chuẩn chính xác đến hàng phần trăm.

18. Người ta phân 400 quả trứng thành năm lớp căn cứ trên khối lượng của chúng (đơn vị là gam). Ta có bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây.

Lớp	Tần số
[27,5 ; 32,5)	18
[32,5 ; 37,5)	76
[37,5 ; 42,5)	200
[42,5 ; 47,5)	100
[47,5 ; 52,5)	6
	$N = 400$

a) Tính số trung bình.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

19. Một người lái xe thường xuyên đi lại giữa hai địa điểm A và B. Thời gian đi (tính bằng phút) được ghi lại trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây.

Lớp	**Tần số**
[40 ; 44]	9
[45 ; 49]	15
[50 ; 54]	30
[55 ; 59]	17
[60 ; 64]	17
[65 ; 69]	12
	$N = 100$

a) Tính thời gian trung bình mà người đó đi từ A đến B.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

20. Một nhà nghiên cứu ghi lại tuổi của 30 bệnh nhân mắc bệnh đau mắt hột. Kết quả thu được mẫu số liệu như sau :

21 17 22 18 20 17 15 13 15 20 15 12 18 17 25 17 21 15

12 18 16 23 14 18 19 13 16 19 18 17.

a) Lập bảng phân bố tần số.

b) Tính số trung bình và độ lệch chuẩn.

c) Tính số trung vị và mốt.

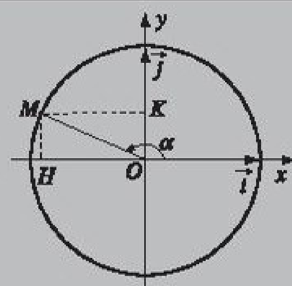
21. Người ta tiến hành phỏng vấn một số người về một bộ phim mới chiếu trên truyền hình. Người điều tra yêu cầu cho điểm bộ phim (thang điểm là 100). Kết quả được trình bày trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây.

Lớp	**Tần số**
[50 ; 60)	2
[60 ; 70)	6
[70 ; 80)	10
[80 ; 90)	8
[90 ; 100)	4
	$N = 30$

a) Tính số trung bình.

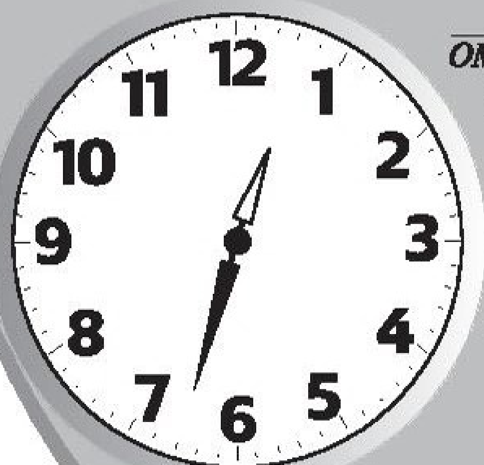
b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Chương 6. GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC



$\overrightarrow{OM} = (\cos\alpha).\vec{i} + (\sin\alpha).\vec{j}$

$M(\cos\alpha ; \sin\alpha)$



Từ 0 giờ đến 12 giờ, hai kim đồng hồ ở vị trí hai tia đối nhau 11 lần.

Góc và cung lượng giác có gì khác với góc và cung hình học ? Điều quan trọng là mỗi góc và cung lượng giác đều tương ứng với một số thực duy nhất và với một điểm duy nhất trên đường tròn lượng giác.Trong chương này, chúng ta sẽ thấy lại các tỉ số lượng giác đã học theo một ý nghĩa sâu sắc hơn, sẽ phải ghi nhớ khá nhiều **công thức lượng giác** và rèn luyện các kĩ năng biến đổi lượng giác. Các kiến thức và kĩ năng ấy sẽ rất có ích không những trong Đại số mà cả trong Hình học lớp 10, lớp 11,... và một số môn học khác.

§ 1 GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

Ta đã có khái niệm góc giữa hai tia chung gốc mà người ta còn gọi là *góc hình học*. Trong bài này, ta sẽ xây dựng khái niệm góc lượng giác liên quan chặt chẽ với góc hình học.

1. Đơn vị đo góc và cung tròn, độ dài của cung tròn

a) Độ

Ta đã biết đường tròn bán kính R có độ dài bằng $2\pi R$ và có số đo bằng 360°. Nếu chia đường tròn thành 360 phần bằng nhau thì mỗi cung tròn này có độ dài bằng $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$ và có số đo 1°, góc ở tâm chắn mỗi cung đó có số đo bằng 1°.

Vậy cung tròn bán kính R có số đo a° $(0 \leq a \leq 360)$ thì có độ dài

$$\boxed{\frac{\pi a}{180} \cdot R.}$$

Ví dụ 1

– Số đo của $\frac{3}{4}$ đường tròn là $\frac{3}{4} \cdot 360^{\circ} = 270^{\circ}$.

– Cung tròn bán kính R có số đo 72° thì có độ dài là $\frac{\pi \,.\, 72}{180} \cdot R = \frac{2\pi R}{5}$. □

H1 *Một hải lí là độ dài cung tròn xích đạo có số đo* $\left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} = 1'$. *Biết độ dài xích đạo là 40 000 km, hỏi một hải lí dài bao nhiêu kilômét ?*

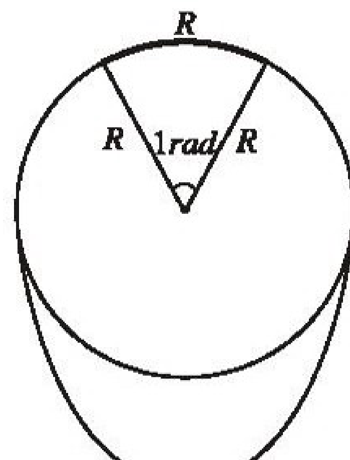
b) Rađian

Một đơn vị khác được sử dụng nhiều trong toán học, khoa học và kĩ thuật là rađian. Nó tỏ ra thuận lợi khi tính độ dài cung tròn.

ĐỊNH NGHĨA

> *Cung tròn có độ dài bằng bán kính gọi là **cung có số đo 1 rađian**, gọi tắt là cung 1 rađian. Góc ở tâm chắn cung 1 rađian gọi là **góc có số đo 1 rađian**, gọi tắt là góc 1 rađian.*
> *1 rađian còn viết tắt là 1 rad.*

H2 *Để hình dung góc 1 rad người ta quấn đoạn dây dài bằng bán kính đường tròn quanh đường tròn đó (h.6.1). Hãy làm điều trên và đo xem góc 1 rad xấp xỉ bằng bao nhiêu độ.*



Hình 6.1

• Xét các cung của đường tròn bán kính R. Vì cung tròn có độ dài bằng R thì có số đo 1 rad nên :

– Toàn bộ đường tròn (do có độ dài bằng $2\pi R$) có số đo rađian là $\dfrac{2\pi R}{R} = 2\pi$;

– Cung có độ dài bằng l thì có số đo rađian là

$$\boxed{\alpha = \frac{l}{R}.}$$

Vậy cung tròn bán kính R có số đo α rađian thì có độ dài

$$\boxed{l = \alpha R}$$

và khi $R = 1$ (tức là trên đường tròn đơn vị) thì độ dài cung tròn bằng số đo rađian của nó.

• Bây giờ, ta xét quan hệ giữa số đo rađian và số đo độ của cùng một cung tròn.

Giả sử cung tròn có độ dài l. Gọi α là số đo rađian và a là số đo độ của cung đó. Khi đó, theo các công thức về độ dài cung, ta có

$$l = \alpha R = \frac{\pi a}{180} \cdot R,$$

suy ra

$$\boxed{\frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}.}$$

Vậy cung có số đo 1 rađian thì có số đo độ là $\dfrac{180}{\pi}$, tức là

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{o} \approx 57^{o}17'45''.$$

Cung có số đo 1 độ thì có số đo rađian là $\dfrac{\pi}{180}$, tức là

$$1^{o} = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0{,}0175 \text{ rad}.$$

CHÚ Ý

Vì tính chất tự nhiên và thông dụng của rađian, người ta thường không viết chữ rađian hay rad sau số đo của cung và góc, chẳng hạn $\frac{\pi}{2}$ rad cũng được viết là $\frac{\pi}{2}$.

GHI NHỚ

Bảng chuyển đổi số đo độ và số đo rađian của một số cung tròn

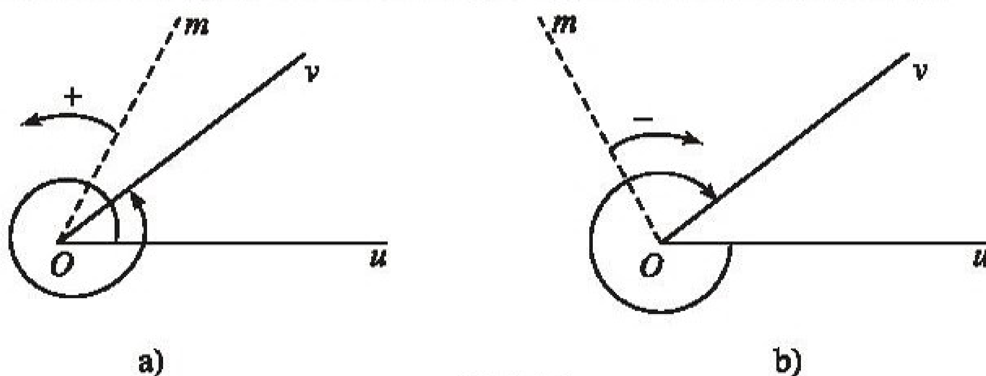
Độ	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o	270^o	360^o
Rađian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

2. Góc và cung lượng giác

Khái niệm góc và cung lượng giác gắn chặt với việc quay quanh một điểm trong mặt phẳng.

a) Khái niệm góc lượng giác và số đo của chúng

• Để khảo sát việc quay tia Om quanh điểm O, ta cần chọn một chiều quay gọi là *chiều dương*. Thông thường, ta chọn đó là chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ (và chiều quay của kim đồng hồ gọi là *chiều âm*) (h.6.2).



Hình 6.2

Khi đó, nếu tia Om quay theo chiều dương đúng một vòng thì ta nói tia Om quay góc 360^o (hay 2π rad), quay đúng hai vòng thì nói nó quay góc 720^o (hay 4π rad), quay theo chiều âm nửa vòng thì nói nó quay góc -180^o (hay $-\pi$ rad), quay theo chiều âm ba vòng bốn phần bảy (tức $\frac{25}{7}$ vòng) thì nói nó quay góc $-\frac{25}{7}.360^o$ (hay $-\frac{50\pi}{7}$ rad) ...

• Cho hai tia Ou, Ov. Nếu tia Om quay chỉ theo chiều dương (hay chỉ theo chiều âm) xuất phát từ tia Ou đến trùng với tia Ov thì ta nói : *Tia Om quét một* ***góc lượng giác*** *tia đầu Ou, tia cuối Ov*. Khi quay như thế, tia Om có thể gặp tia Ov nhiều lần, mỗi lần ta được một góc lượng giác tia đầu Ou, tia cuối Ov. Do đó, cho hai tia Ou, Ov thì có vô số góc lượng giác (một họ góc lượng giác) tia đầu Ou, tia cuối Ov. Mỗi góc lượng giác như thế đều được kí hiệu là (Ou, Ov).

Khi tia Om quay góc a° (hay α rad) thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên *có số đo* a° (hay α rad).

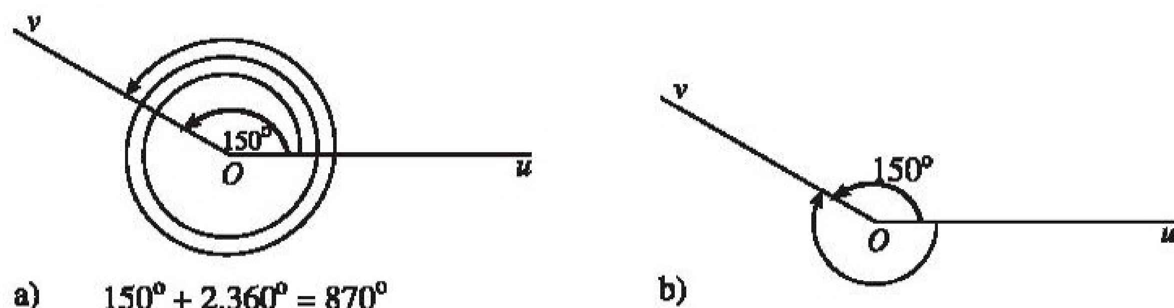
Như vậy :

> *Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou, tia cuối Ov và số đo độ (hay số đo rađian) của nó.*

Ví dụ 2. Trên mỗi hình 6.3 a), b) đều có biểu diễn góc lượng giác tia đầu Ou, tia cuối Ov và có số đo 150°.

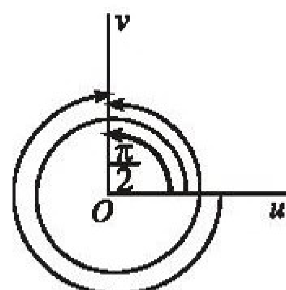
a) Góc thứ hai trên hình 6.3 a) có được do tia Om quay tiếp theo chiều dương hai vòng nữa nên có số đo $150^{\circ} + 2.360^{\circ}$ $(= 870^{\circ})$.

b) Góc thứ hai trên hình 6.3 b) có được do tia Om quay theo chiều âm từ Ou đến trùng Ov lần đầu tiên nên có số đo $-(360^{\circ} - 150^{\circ}) = 150^{\circ} - 360^{\circ} (= -210^{\circ})$. Nếu cho tia Om quay tiếp một vòng nữa theo chiều âm thì được góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo $150^{\circ} - 2.360^{\circ}$ $(= -570^{\circ})$. □



Hình 6.3

H3 *Trên hình 6.4 có ba góc lượng giác (Ou, Ov), trong đó một góc có số đo* $\frac{\pi}{2}$. *Hỏi hai góc lượng giác còn lại có số đo bao nhiêu ?*

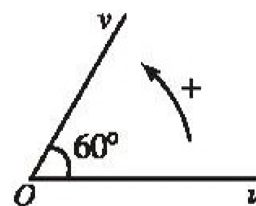


Hình 6.4

Tổng quát :

Nếu một góc lượng giác có số đo a^o *(hay* α rad) *thì mọi góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với nó có số đo dạng* $a^o + k360^o$ *(hay* $\alpha + k2\pi$ rad), *k là số nguyên, mỗi góc ứng với một giá trị của k.*

Ví dụ 3. Giả sử góc hình học *uOv* trên hình 6.5 có số đo 60^o. Khi đó dễ thấy các góc lượng giác tia đầu *Ou*, tia cuối *Ov* có số đo $60^o + k360^o$, còn các góc lượng giác tia đầu *Ov*, tia cuối *Ou* có số đo $-60^o + k360^o$ $(k \in \mathbb{Z})$. □



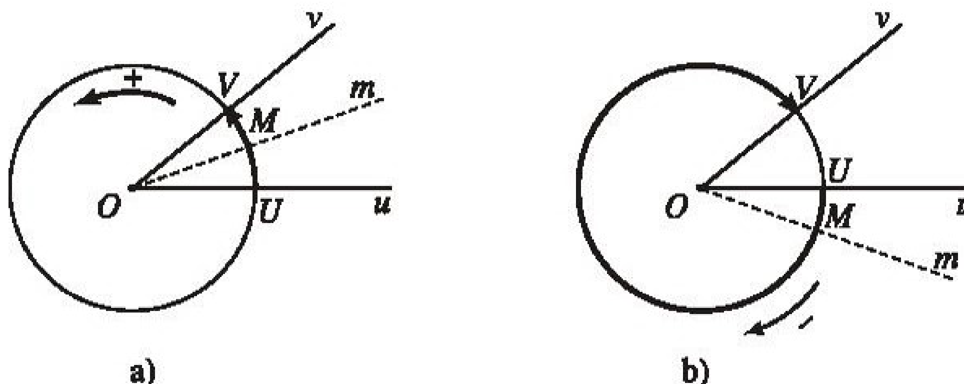
Hình 6.5

CHÚ Ý

Không được viết $a^o + k2\pi$ hay $\alpha + k360^o$ (vì không cùng đơn vị đo).

b) Khái niệm cung lượng giác và số đo của chúng

• Vẽ một đường tròn tâm *O* bán kính *R*. Nếu tia *Om* cắt đường tròn tại *M* thì việc cho tia *Om* quay quanh *O* cũng có nghĩa là cho điểm *M* chạy trên đường tròn đó. Chiều quay của tia *Om* cho ta chiều di động của điểm *M* trên đường tròn : chiều dương là chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ và chiều âm là chiều quay của kim đồng hồ như ở hình 6.6. Đường tròn với chiều di động đã được chọn như thế gọi là ***đường tròn định hướng***.



Hình 6.6

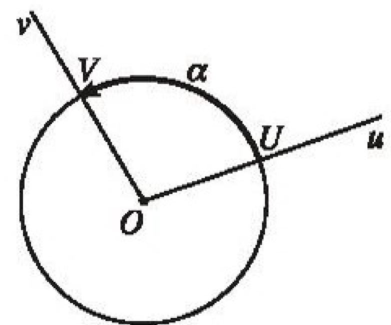
Gọi giao của các tia *Ou*, *Ov* nói trên với đường tròn đó là *U* và *V*. Khi tia *Om* quét nên góc lượng giác (*Ou*, *Ov*) thì điểm *M* chạy trên đường tròn luôn theo một chiều từ điểm *U* đến điểm *V*. Ta nói *điểm M vạch nên một* ***cung lượng giác***

mút đầu (điểm đầu) U, *mút cuối* (điểm cuối) V, tương ứng với góc lượng giác (Ou, Ov). Vậy hai điểm U và V trên đường tròn định hướng xác định vô số cung lượng giác (họ cung lượng giác) mút đầu U, mút cuối V, cùng được kí hiệu là $\overset{\curvearrowright}{UV}$.

• Ta coi số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) là số đo của cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{UV}$ tương ứng. Từ đó :

> *Trên đường tròn định hướng, mỗi cung lượng giác được xác định bởi mút đầu, mút cuối và số đo của nó. Nếu một cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{UV}$ có số đo α thì mọi cung lượng giác cùng mút đầu U, mút cuối V có số đo dạng $\alpha + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; mỗi cung ứng với một giá trị của k.*

Nếu α là số đo của cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{UV}$ vạch nên bởi điểm M chạy trên đường tròn theo chiều dương từ U đến gặp V lần đầu tiên thì $0 \le \alpha < 2\pi$ và α chính là số đo của cung tròn (hình học) $\overset{\frown}{UV}$ (h.6.7).



Hình 6.7

3. Hệ thức Sa-lơ



Mi-sen Sa-lơ
(*Michel Chasles* 1793 – 1880)

• Ta đã biết, độ dài đại số $\overline{AB}$ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên trục số Ox (với vectơ đơn vị $\vec{i}$) là số xác định bởi $\overrightarrow{AB} = (\overline{AB})\vec{i}$. Khi đó, với ba điểm tuỳ ý A, B, C trên trục số, từ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ suy ra đẳng thức số $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ gọi là hệ thức Sa-lơ về độ dài đại số.

Ta thừa nhận một hệ thức có dạng tương tự gọi là ***hệ thức Sa-lơ*** *về số đo của góc lượng giác* :

Với ba tia tuỳ ý Ou, Ov, Ow, ta có

$$\text{sđ}(Ou, Ov) + \text{sđ}(Ov, Ow) = \text{sđ}(Ou, Ow) + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Đó là một hệ thức quan trọng trong tính toán về số đo của góc lượng giác.

Từ hệ thức trên suy ra : Với ba tia tuỳ ý Ox, Ou, Ov, ta có

$$\text{sđ}(Ou, Ov) = \text{sđ}(Ox, Ov) - \text{sđ}(Ox, Ou) + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 4. Nếu một góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo $-\dfrac{11\pi}{4}$ và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo $\dfrac{3\pi}{4}$ thì mọi góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo $\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. □

• Đối với các cung lượng giác, ta cũng có hệ thức Sa-lơ :

Với ba điểm tuỳ ý U, V, W trên đường tròn định hướng, ta có

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{UV} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{VW} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{UW} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu hỏi và bài tập

1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) Số đo của cung tròn phụ thuộc vào bán kính của nó.

b) Độ dài cung tròn tỉ lệ với số đo của cung đó.

c) Độ dài cung tròn tỉ lệ với bán kính của nó.

d) Nếu Ou, Ov là hai tia đối nhau thì số đo của các góc lượng giác (Ou, Ov) là $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn nhà Bưu điện TP. Hà Nội theo thứ tự dài 1,75 m và 1,26 m. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu mét ? Cũng câu hỏi đó cho mũi kim giờ.

3. Điền vào các ô trống trong bảng

Số đo độ	-60°	-240°			3100°	
Số đo rađian			$-\dfrac{3\pi}{4}$	$-\dfrac{16\pi}{3}$		$\dfrac{68\pi}{5}$

4. a) Đổi số đo độ của các cung tròn sau thành số đo rađian (chính xác đến hàng phần nghìn) $21^{\circ}30'$ và $75^{\circ}54'$.

b) Đổi số đo rađian của các cung tròn sau ra số đo độ (chính xác đến phút) :

2,5 rad và $\dfrac{2}{\pi}$ rad (có thể dùng máy tính bỏ túi, xem bài đọc thêm).

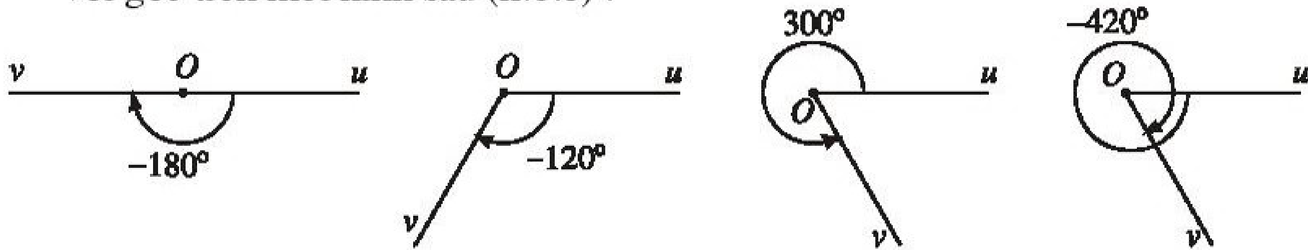
5. Coi kim giờ đồng hồ là tia Ou, kim phút là tia Ov. Hãy tìm số đo của các góc lượng giác (Ou, Ov) khi đồng hồ chỉ 3 giờ, chỉ 4 giờ, chỉ 9 giờ, chỉ 10 giờ.

6. Chứng minh rằng :

a) Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo là $\frac{10\pi}{3}$ và $\frac{22\pi}{3}$ thì có cùng tia cuối ;

b) Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo là 645^o và -435^o thì có cùng tia cuối.

7. Tìm số đo a^o, $-180 < a \leq 180$, của góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối với góc trên mỗi hình sau (h.6.8) :



Hình 6.8

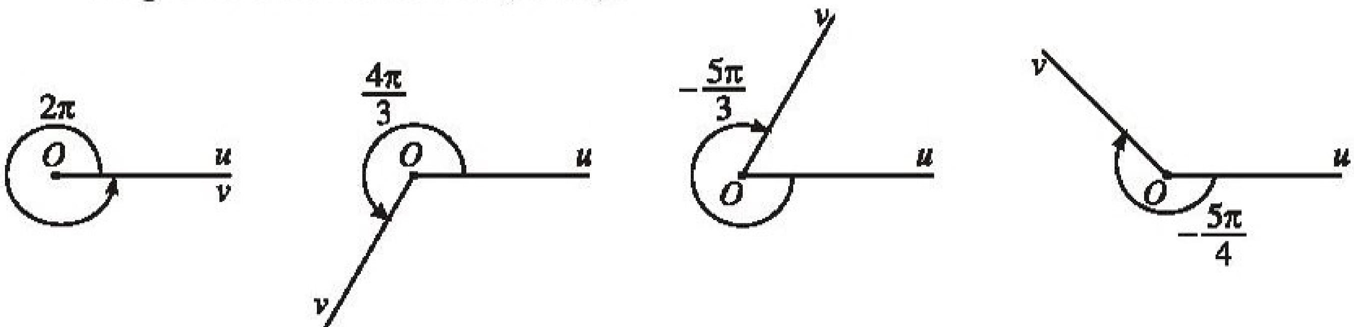
Luyện tập

8. Cho ngũ giác đều $A_0A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo (độ và rađian) của các cung lượng giác $\overset{\frown}{A_0A_i}$, $\overset{\frown}{A_iA_j}$ $(i, j = 0, 1, 2, 3, 4, i \neq j)$.

9. Tìm góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo dương nhỏ nhất, biết một góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo :

a) -90^o ; b) 1000^o ; c) $\frac{30\pi}{7}$; d) $-\frac{15\pi}{11}$.

10. Tìm số đo rađian α, $-\pi < \alpha \leq \pi$, của góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc trên mỗi hình sau (h.6.9) :



Hình 6.9

11. Chứng minh rằng hai tia Ou và Ov vuông góc với nhau khi và chỉ khi góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

12. Kim giờ và kim phút đồng hồ bắt đầu cùng chạy từ vị trí tia Ox chỉ số 12 (tức lúc 0 giờ). Sau khoảng thời gian t giờ (t lấy giá trị thực không âm tuỳ ý), kim giờ đến vị trí tia Ou, kim phút đến vị trí tia Ov.

a) Chứng minh rằng khi quay như thế, kim giờ quét góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo $-\frac{\pi}{6}t$, kim phút quét góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo $-2\pi t$. Hãy tìm số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) theo t.

b) Chứng minh rằng hai tia Ou và Ov trùng nhau khi và chỉ khi $t = \frac{12k}{11}$ với $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

c) Chứng minh rằng trong vòng 12 giờ ($0 \leq t \leq 12$), hai tia Ou và Ov ở vị trí hai tia đối nhau khi và chỉ khi $t = \frac{6}{11}(2k+1)$ với $k = 0, 1, \ldots, 10$.

13. Hỏi hai góc lượng giác có số đo rađian $\frac{35\pi}{3}$ và $\frac{m\pi}{5}$ (m là số nguyên) có thể có cùng tia đầu, tia cuối không ?

§ 2 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC

Trong mục này, ta sẽ mở rộng các giá trị lượng giác của góc hình học thành giá trị lượng giác của góc lượng giác. Đó là cơ sở để xây dựng các hàm số lượng giác, những hàm số quan trọng trong toán học, khoa học và kĩ thuật, liên quan mật thiết đến thực tiễn.

1. Đường tròn lượng giác

a) Định nghĩa

> ***Đường tròn lượng giác*** *là một đường tròn đơn vị (bán kính bằng 1), định hướng, trên đó có một điểm A gọi là điểm gốc.*

Nhắc lại rằng người ta luôn quy ước *trên đường tròn lượng giác, chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương và chiều quay của kim đồng hồ là chiều âm.*

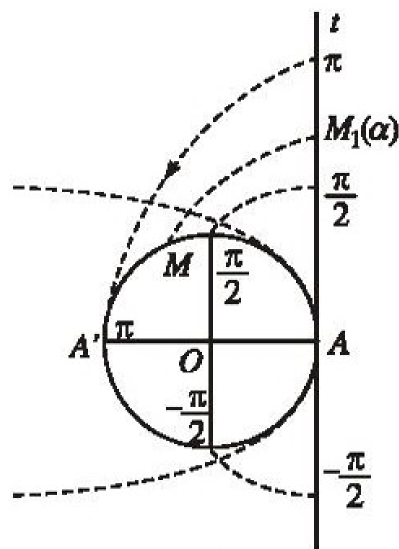
b) Tương ứng giữa số thực và điểm trên đường tròn lượng giác

Cho đường tròn lượng giác tâm O, gốc A. Với mỗi số thực α, hiển nhiên có một cung lượng giác duy nhất $\overset{\frown}{AM}$ có số đo α (rad), cũng có nghĩa là có một góc lượng giác duy nhất (OA, OM) có số đo α. Cung và góc lượng giác đó gọi tắt là ***cung α*** và ***góc α*** ; đôi khi ta cũng viết $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ và $(OA, OM) = \alpha$.

> *Điểm M thuộc đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = \alpha$ gọi là **điểm xác định bởi số α** (hay bởi cung α, hay bởi góc α). Điểm M còn được gọi là điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung (góc) lượng giác có số đo α.*

Ta nhận xét ngay rằng :

Ứng với mỗi số thực α có một điểm trên đường tròn lượng giác (điểm xác định bởi số đó) tương tự như trên trục số. Tuy nhiên, mỗi điểm trên đường tròn lượng giác ứng với vô số số thực. Các số thực đó có dạng $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Hình 6.10

H1 *Để thấy rõ hơn tương ứng giữa số thực và điểm trên đường tròn lượng giác, hãy xét trục số At (gốc A) là tiếp tuyến của đường tròn lượng giác tại A, hình dung At là một sợi dây và quấn dây đó quanh đường tròn lượng giác như ở hình 6.10 : Điểm M_1 trên trục At có toạ độ α đến trùng với điểm M trên đường tròn lượng giác thoả mãn sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$, tức M xác định bởi α. Hỏi :*

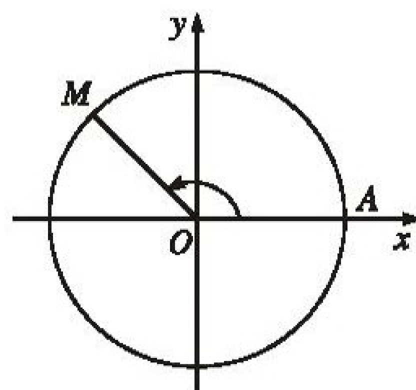
a) Các điểm nào trên trục số At đến trùng với điểm A trên đường tròn lượng giác ?

b) Các điểm nào trên trục số At đến trùng với điểm A' trên đường tròn lượng giác (A' là điểm đối xứng của A qua tâm O của đường tròn) ? Hai điểm tuỳ ý trong số các điểm đó cách nhau bao nhiêu ?

c) Hệ toạ độ vuông góc gắn với đường tròn lượng giác

Cho đường tròn lượng giác tâm O, điểm gốc A. Xét hệ toạ độ vuông góc Oxy sao cho tia Ox trùng với tia OA, góc lượng giác (Ox, Oy) là góc $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ (h.6.11). Hệ toạ độ đó được gọi là ***hệ toạ độ vuông góc gắn với đường tròn lượng giác*** *đã cho.*

Sau này, ta luôn xét đường tròn lượng giác trong hệ toạ độ vuông góc gắn với nó.



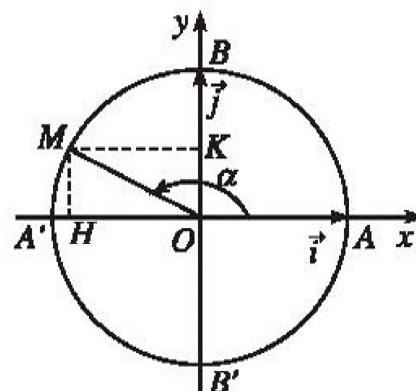
Hình 6.11

H2 *Tìm toạ độ của điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ có số đo $\dfrac{3\pi}{4}$ (h.6.11).*

2. Giá trị lượng giác sin và côsin

a) Các định nghĩa

Với mỗi góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α, lấy điểm M trên đường tròn lượng giác để $(OA, OM) = \alpha$, tức là điểm M xác định bởi số α (h.6.12). Gọi toạ độ của M trong hệ toạ độ gắn với đường tròn đó là $(x\ ;\ y)$.

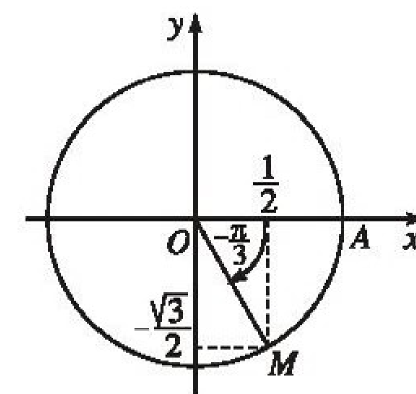


Hình 6.12

> *Hoành độ x của M được gọi là* ***côsin*** *của góc lượng giác (Ou, Ov) hay của α và kí hiệu*
>
> $$\cos(Ou, Ov) = \cos\alpha = x.$$
>
> *Tung độ y của M được gọi là* ***sin*** *của góc lượng giác (Ou, Ov) hay của α và kí hiệu*
>
> $$\sin(Ou, Ov) = \sin\alpha = y.$$

Nếu sđ$(Ou, Ov) = a^{\circ}$ thì ta cũng viết

$$\cos(Ou, Ov) = \cos a^{\circ},$$
$$\sin(Ou, Ov) = \sin a^{\circ}.$$



Hình 6.13

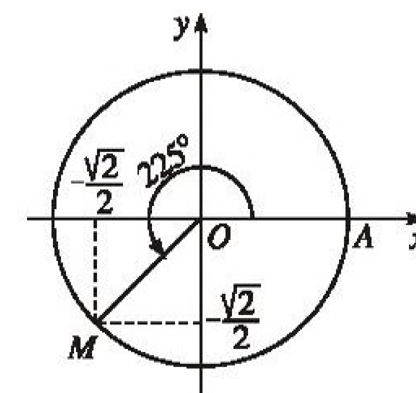
Ví dụ 1

a) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$;

$\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (h.6.13).

b) $\sin 225^{\circ} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos 225^{\circ} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (h.6.14). □



Hình 6.14

CHÚ Ý

Gọi $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ là các vectơ đơn vị trên trục hoành và trục tung (h.6.12). Khi đó, nếu điểm M thuộc đường tròn lượng giác xác định bởi số α thì

$$\overrightarrow{OM} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\sin\alpha)\vec{j},$$

tức là M có toạ độ $(\cos\alpha ; \sin\alpha)$.

Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của điểm M trên Ox và Oy thì $\overrightarrow{OH} = (\cos\alpha)\vec{i}$ và $\overrightarrow{OK} = (\sin\alpha)\vec{j}$, tức là

$$\boxed{\cos\alpha = \overline{OH} \ ; \sin\alpha = \overline{OK} \ .}$$

Trong lượng giác, người ta còn gọi trục Ox là ***trục côsin*** và trục Oy là ***trục sin***.

H3

a) Tìm α để $\sin\alpha = 0$. Khi đó, $\cos\alpha$ bằng bao nhiêu ?

b) Tìm α để $\cos\alpha = 0$. Khi đó, $\sin\alpha$ bằng bao nhiêu ?

b) Tính chất

1) Vì các góc lượng giác $\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ cùng xác định một điểm M trên đường tròn lượng giác nên ta có

$$\boxed{\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha \ ; \sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha.}$$

2) Với mọi α, ta luôn có

$$\boxed{-1 \le \cos\alpha \le 1 \ ; -1 \le \sin\alpha \le 1.}$$

3) Vì $OH^2 + OK^2 = OM^2 = 1$ (h.6.12) nên ta có

$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.}$$

H4

a) Trên đường tròn lượng giác gốc A, xét cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ có số đo α. Hỏi điểm M nằm trong nửa mặt phẳng nào thì $\cos\alpha > 0$, trong nửa mặt phẳng nào thì $\cos\alpha < 0$? Vẽ hình minh hoạ. Cũng câu hỏi đó cho $\sin\alpha$.

b) Hãy xác định dấu của $\sin 3$ và $\cos 3$.

3. Giá trị lượng giác tang và côtang

a) Các định nghĩa

Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α.

> *Nếu* $\cos\alpha \neq 0$ (tức $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) *thì tỉ số* $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ *được gọi là* ***tang*** *của góc* α, *kí hiệu là* $\tan\alpha$ (*người ta còn dùng kí hiệu* $\text{tg}\alpha$).

Vậy

$$\tan(Ou, Ov) = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

> *Nếu* $\sin\alpha \neq 0$ (tức $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) *thì tỉ số* $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ *được gọi là* ***côtang*** *của góc* α, *kí hiệu là* $\cot\alpha$ (*người ta còn dùng kí hiệu* $\text{cotg}\alpha$).

Vậy

$$\cot(Ou, Ov) = \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Khi sđ $(Ou, Ov) = a^o$, ta cũng viết

$$\tan(Ou, Ov) = \tan a^o; \qquad \cot(Ou, Ov) = \cot a^o.$$

Ví dụ 2. Theo ví dụ 1, ta có

a) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$;

b) $\cot 225^o = \dfrac{\cos 225^o}{\sin 225^o} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$. □

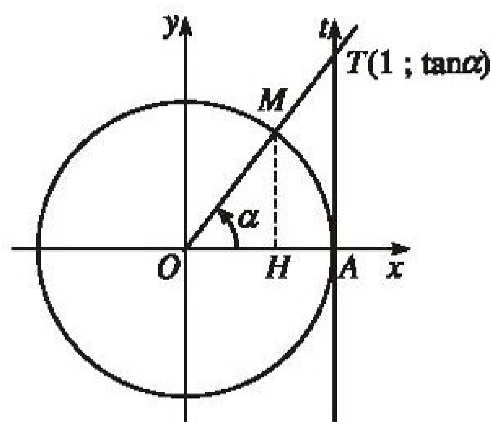
b) Ý nghĩa hình học

• Xét trục số At gốc A, tiếp xúc với đường tròn lượng giác tại điểm gốc A và cùng hướng với trục Oy. Khi $(OA, OM) = \alpha$ sao cho $\cos\alpha \neq 0$ thì đường thẳng OM cắt trục At tại điểm T có toạ độ là $(1 ; \tan\alpha)$, tức là

$$\boxed{\tan\alpha = \overline{AT}.}$$

Thực vậy, đường thẳng qua gốc O (khác Oy) có phương trình $y = kx$ nên nó đi qua điểm $M(\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha)$ khi và chỉ khi $k = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Vậy phương trình đường thẳng OM là $y = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.x$ (h.6.15). Rõ ràng, giao điểm T đang xét có hoành độ $x = 1$ nên tung độ của T là $y = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$.

Vì vậy, trục At còn gọi là ***trục tang***.



Hình 6.15

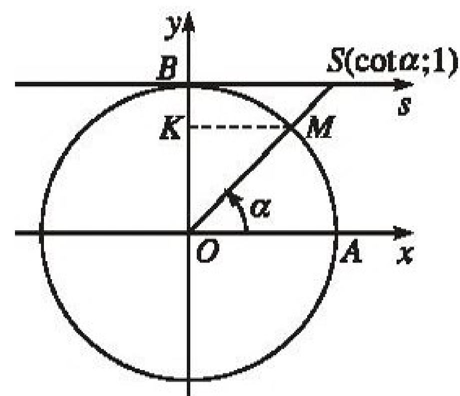
• Xét trục số Bs gốc B tiếp xúc với đường tròn lượng giác tại $B(0\ ;\ 1)$, cùng hướng với Ox (h.6.16).

Khi $(OA, OM) = \alpha$ mà $\sin\alpha \neq 0$ thì đường thẳng OM cắt trục Bs tại điểm S có toạ độ là $(\cot\alpha\ ;\ 1)$, tức là

$$\boxed{\cot\alpha = \overline{BS}}$$

(chứng minh tương tự như trên).

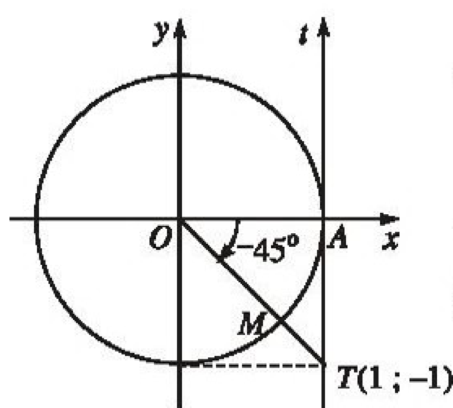
Vì vậy, trục Bs còn gọi là ***trục côtang***.



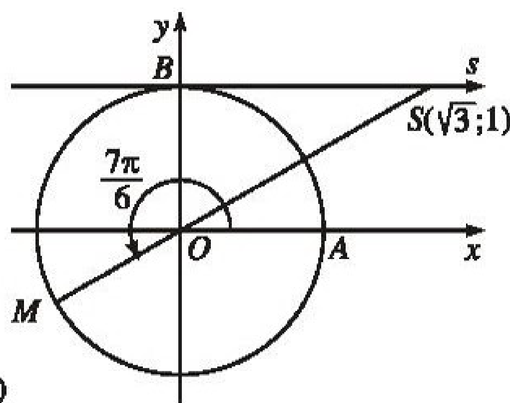
Hình 6.16

Ví dụ 3. a) $\tan(-45^o) = -1$ (h.6.17).

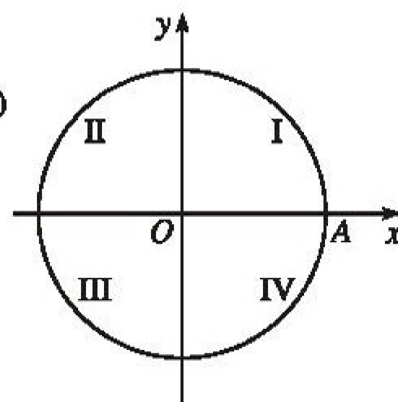
b) $\cot\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ (h.6.18). □



Hình 6.17



Hình 6.18



Hình 6.19

H5 *Các trục toạ độ Ox, Oy chia mặt phẳng thành bốn góc phần tư I, II, III, IV (h.6.19). Hỏi với điểm M nằm trong góc phần tư nào thì*

a) $\tan(OA, OM) > 0$?

b) $\cot(OA, OM) < 0$?

c) Tính chất

1) Từ ý nghĩa hình học nói trên, suy ra : Với mọi $k \in \mathbb{Z}$, ta có

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha \text{ ; } \cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$$

(khi các biểu thức có nghĩa).

2) Từ định nghĩa tang và côtang, suy ra

Khi $\sin\alpha . \cos\alpha \neq 0$ (tức khi $\alpha \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$), ta có

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

3) Từ định nghĩa tang và côtang và từ công thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ta suy ra ngay các công thức

Khi $\cos\alpha \neq 0$, $$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Khi $\sin\alpha \neq 0$, $$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

4. Tìm giá trị lượng giác của một số góc

• Từ định nghĩa các giá trị lượng giác nói trên, ta thấy : Nếu góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α, $0 \leq \alpha \leq \pi$ thì các giá trị lượng giác của nó bằng các giá trị lượng giác của góc hình học uOv đã học trước đây. Vậy ta có bảng sau :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot\alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

• Khi biết một giá trị lượng giác của góc α, có thể dùng các công thức lượng giác ở mục 2, mục 3 và dấu của giá trị lượng giác để tính toán các giá trị lượng giác còn lại của góc α.

Ví dụ 4. Cho α, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Hãy tìm $\cos\alpha$, nếu biết $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

Giải. Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha < 0$, từ đó

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\frac{3}{5}.$$ □

Ví dụ 5. Cho α, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Hãy tìm $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, biết $\tan\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Giải. Do $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\cos\alpha > 0$. Vậy từ

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{5}{4}} = \frac{4}{9},$$

suy ra $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ và từ đó $\sin\alpha = \cos\alpha . \tan\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. □

CHÚ Ý

Vì cho góc lượng giác (Ou, Ov) cũng có nghĩa là cho cung lượng giác $\overset{\frown}{UV}$ tương ứng trên đường tròn lượng giác tâm O, nên nói về các giá trị lượng giác của góc (Ou, Ov) cũng có nghĩa là nói về các giá trị lượng giác của cung $\overset{\frown}{UV}$ tương ứng.

Câu hỏi và bài tập

14. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai ?

a) Nếu α âm thì ít nhất một trong các số $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ phải âm.

b) Nếu α dương thì $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.

c) Các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các số thực sau trùng nhau :

$$\frac{\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}; \frac{13\pi}{4} \quad \text{và} \quad -\frac{71\pi}{4}.$$

d) Ba số sau bằng nhau :

$$\cos^2 45^\circ \; ; \; \sin\left(\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right) \text{ và } -\sin 210^\circ.$$

e) Hai số sau khác nhau :

$$\sin\frac{11\pi}{6} \quad \text{và} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6} + 1505\pi\right).$$

g) Các điểm của đường tròn lượng giác lần lượt xác định bởi các số 0 ; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; π ; $-\frac{2\pi}{3}$ và $-\frac{\pi}{3}$ là các đỉnh liên tiếp của một lục giác đều.

15. Tìm các điểm của đường tròn lượng giác xác định bởi số α trong mỗi trường hợp sau :

a) $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$; b) $\sqrt{\sin^2\alpha} = \sin\alpha$; c) $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$.

16. Xác định dấu của các số sau :

a) $\sin 156^\circ$; $\cos(-80^\circ)$; $\tan\left(-\frac{17\pi}{8}\right)$ và $\tan 556^\circ$;

b) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$; $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right)$ và $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, biết rằng $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

17. Tính các giá trị lượng giác của các góc sau :

a) $-\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi$; b) $k\pi$; c) $\frac{\pi}{2} + k\pi$; d) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

18. Tính các giá trị lượng giác của góc α trong mỗi trường hợp sau :

a) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, $\sin\alpha < 0$; b) $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

c) $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, $-\pi < \alpha < 0$.

19. Đơn giản các biểu thức :

a) $\sqrt{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}$; b) $\dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \dfrac{1}{1 + \cos\alpha}$ (giả sử $\sin\alpha \neq 0$) ;

c) $\dfrac{1 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \cos^2\alpha$ (giả sử $\cos\alpha \neq 0$).

Luyện tập

20. Tính các giá trị lượng giác của các góc sau :

$$225^{o}, -225^{o}, 750^{o}, -510^{o}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{10\pi}{3}, -\frac{17\pi}{3}.$$

21. Xét góc lượng giác $(OA, OM) = \alpha$, trong đó M là điểm không nằm trên các trục toạ độ Ox, Oy. Hãy lập bảng dấu của $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ theo vị trí của M thuộc các góc phần tư I, II, III, IV trong hệ toạ độ Oxy. Hỏi M ở trong góc phần tư nào thì :

a) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ cùng dấu ? b) $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ khác dấu ?

22. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

b) $1 - \cot^4\alpha = \dfrac{2}{\sin^2\alpha} - \dfrac{1}{\sin^4\alpha}$ (nếu $\sin\alpha \neq 0$) ;

c) $\dfrac{1 + \sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = 1 + 2\tan^2\alpha$ (nếu $\sin\alpha \neq \pm 1$).

23. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc α :

a) $\sqrt{\sin^4\alpha + 4\cos^2\alpha} + \sqrt{\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha}$;

b) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha)$;

c) $\dfrac{2}{\tan\alpha - 1} + \dfrac{\cot\alpha + 1}{\cot\alpha - 1}$ (nếu $\tan\alpha \neq 1$).

Bài đọc thêm

SỬ DỤNG MÁY TÍNH BỎ TÚI ĐỂ ĐỔI SỐ ĐO GÓC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Có thể dùng máy tính bỏ túi để tìm giá trị lượng giác của góc lượng giác và đổi số đo độ của cung tròn ra rađian và ngược lại. Chẳng hạn, dùng máy tính CASIO *fx – 500MS* :

– Để tính sin $\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$ thì ấn

[MODE] [MODE] [MODE] [2] [sin] [(] [(–)] 9 [SHIFT] π [÷] 4 [=]

Kết quả là – 0,707 106 781 $\left(\approx -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

– Để tính tan $63^{o}52'41''$ thì ấn

[MODE] [MODE] [MODE] [1] [tan] 63 [°' "] 52 [°' "] 41 [°' "] [=]

Kết quả là 2,039 276 645.

– Để đổi $33^{o}45'$ ra rađian thì ấn

[MODE] [MODE] [MODE] [2] 33 [°' "] 45 [°' "] [SHIFT] [DRG] [1] [=]

Kết quả là 0,589 048 622.

– Để đổi $\frac{3}{4}$ rad ra độ thì ấn

[MODE] [MODE] [MODE] [1] [(] 3 [÷] 4 [)] [SHIFT] [DRG] [2] [=] [°' "]

Kết quả là $42^{o}58'19''$ (xấp xỉ).

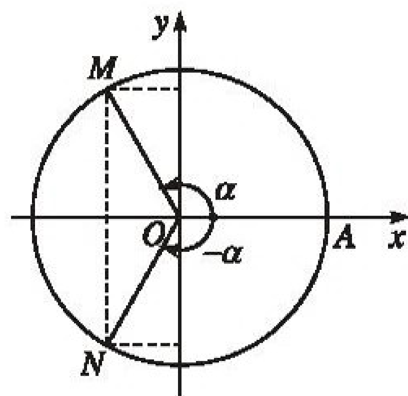
§ 3 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC (CUNG) CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

H *Xét hai điểm M, N thuộc đường tròn lượng giác xác định bởi hai góc có liên quan nêu trong bốn trường hợp 1, 2, 3, 4 dưới đây. Có nhận xét gì về vị trí của hai điểm M, N đối với hệ trục toạ độ Oxy cho mỗi trường hợp ? Từ đó giải thích tại sao có các công thức sau đây (chỉ xét các góc lượng giác mà biểu thức trong công thức có nghĩa).*

1. Hai góc đối nhau

$(OA, OM) = \alpha$, $(OA, ON) = -\alpha$ (h.6.20).

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$$

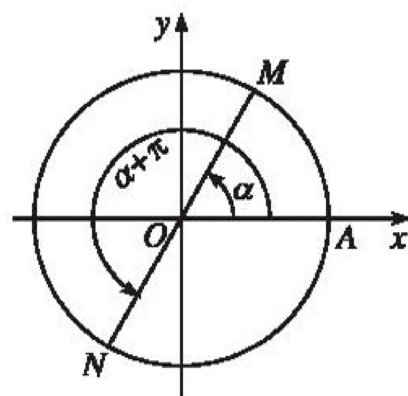


Hình 6.20

2. Hai góc hơn kém nhau π

$(OA, OM) = \alpha$, $(OA, ON) = \alpha + \pi$ (h.6.21).

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$$
$$\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha.$$

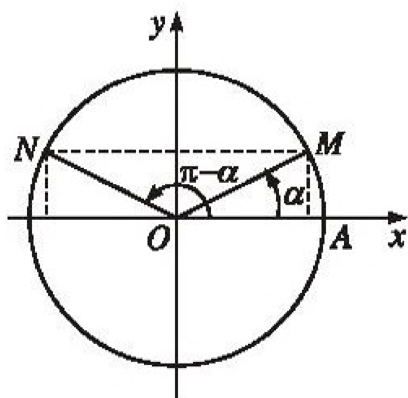


Hình 6.21

3. Hai góc bù nhau

$(OA, OM) = \alpha$, $(OA, ON) = \pi - \alpha$ (h.6.22).

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha.$$

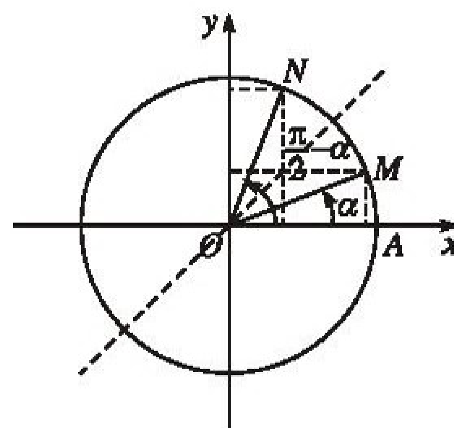


Hình 6.22

4. Hai góc phụ nhau

$(OA, OM) = \alpha$, $(OA, ON) = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ (h.6.23).

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha.$$



Hình 6.23

Nhận xét. Nhờ các công thức trên, ta có thể đưa việc tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác tuỳ ý về việc tính giá trị lượng giác của góc α, $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$, thậm chí $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{4}$.

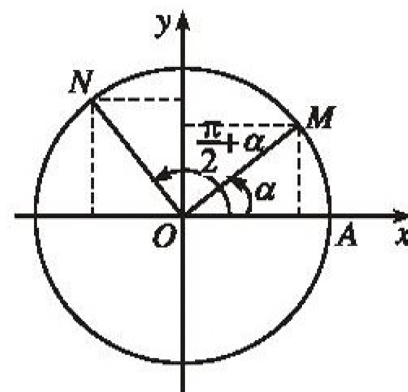
Vậy có thể dùng bảng tra cứu sin và côsin của các góc có số đo a° $(0 \le a \le 45)$ để tìm sin và côsin của các góc lượng giác tuỳ ý. Chẳng hạn để tìm $\sin(-100^{\circ})$, ta có thể tiến hành như sau :

$$\sin(-100^{\circ}) = -\sin 100^{\circ} = -\sin(180^{\circ} - 100^{\circ})$$
$$= -\sin 80^{\circ} = -\cos(90^{\circ} - 80^{\circ}) = -\cos 10^{\circ}.$$

Ví dụ

a) Từ các công thức trên, ta dễ dàng suy ra các công thức thường gặp sau đây về hai góc hơn kém nhau $\dfrac{\pi}{2}$ (cũng có thể dùng hình vẽ để nhìn nhận các công thức này, xem hình 6.24).

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha\ ;$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha\ ;$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha\ ;$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha.$$



Hình 6.24

b) $\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = \cos\frac{13\pi}{4} = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c) $\tan 10^\circ \tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ \tan 50^\circ \tan 60^\circ \tan 70^\circ \tan 80^\circ =$

$= (\tan 10^\circ \tan 80^\circ).(\tan 20^\circ \tan 70^\circ).(\tan 30^\circ \tan 60^\circ).(\tan 40^\circ \tan 50^\circ) = 1$

(do $\tan a^\circ \tan(90^\circ - a^\circ) = \tan a^\circ \cot a^\circ = 1$). □

CHÚ Ý

Nếu số đo của góc hình học uOv là α $(0 \leq \alpha \leq \pi)$ thì số đo của góc lượng giác tuỳ ý (Ou, Ov) bằng $\alpha + k2\pi$ hoặc $-\alpha + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Do đó, từ các công thức $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, ta có

$$\cos\widehat{uOv} = \cos(Ou, Ov), \ \sin\widehat{uOv} = |\sin(Ou, Ov)|$$

với một góc lượng giác (Ou, Ov) tuỳ ý.

Câu hỏi và bài tập

24. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai ?

a) Khi α đổi dấu (tức thay α bởi $-\alpha$) thì $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$ đổi dấu còn $\tan\alpha$ không đổi dấu.

b) Với mọi α, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$.

c) Với mọi α, $\left|\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \cos(\alpha + \pi)\right| + \left|\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)\right| = 0.$

d) Nếu $\cos\alpha \neq 0$ thì $\frac{\cos(-5\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{-5\alpha}{\alpha} = -5.$

e) $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} = 1.$ g) $\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5}.$

25. Tìm các mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của các cung α và $\alpha - \frac{3\pi}{2}$.

26. Tính :

a) $\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + ... + \sin^2 80^\circ$ (8 số hạng) ;

b) $\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + ... + \cos 180^\circ$ (18 số hạng) ;

c) $\cos 315^\circ + \sin 330^\circ + \sin 250^\circ - \cos 160^\circ$.

27. Dùng bảng tính sin, côsin (hoặc dùng máy tính bỏ túi) để tính các giá trị sau (chính xác đến hàng phần nghìn) :

$$\cos(-250^\circ) ; \sin 520^\circ \text{ và } \sin\frac{11\pi}{10}.$$

28. Xét hệ toạ độ vuông góc Oxy gắn với đường tròn lượng giác. Kiểm nghiệm rằng điểm M với toạ độ $\left(-\frac{4}{5} ; \frac{3}{5}\right)$ nằm trên đường tròn lượng giác đó. Giả sử điểm M xác định bởi số α. Tìm toạ độ các điểm xác định bởi các số :

$$\pi - \alpha ; \pi + \alpha ; \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ và } \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

29. Biết $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, hãy tính các giá trị lượng giác của góc -75°.

Luyện tập

30. Hỏi các góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo như sau :

$$2594^\circ ; -646^\circ ; -2446^\circ \text{ và } 74^\circ$$

thì có cùng tia cuối không ?

31. Xác định dấu của các giá trị lượng giác sau :

$$\cos 250^\circ ; \tan(-672^\circ) ; \tan\frac{31\pi}{8} ; \sin(-1050^\circ) \text{ và } \cos\frac{16\pi}{5}.$$

32. Hãy tính các giá trị lượng giác của góc α trong mỗi trường hợp sau :

a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ và $\cos\alpha < 0$; b) $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

33. a) Tính $\sin\frac{25\pi}{6} + \cos\frac{25\pi}{3} + \tan\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$.

b) Biết $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$, tính $\cos(2\pi - \alpha)$, $\tan(\alpha - 7\pi)$ và $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

34. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$ (khi các biểu thức đó có nghĩa) ;

b) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$; c) $2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)=(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2$.

35. Biết $\sin\alpha-\cos\alpha=m$, hãy tính $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$.

36. Với số α, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, xét điểm M của đường tròn lượng giác xác định bởi số 2α rồi xét tam giác vuông $A'MA$ (A' đối xứng với A qua tâm O của đường tròn).

a) Tính AM^2 bằng hai cách khác nhau để suy ra $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$.

b) Tính diện tích của tam giác $A'MA$ bằng hai cách khác nhau để suy ra $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

c) Chứng minh $\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ rồi tính các giá trị lượng giác của các góc $\dfrac{3\pi}{8}$ và $\dfrac{5\pi}{8}$.

37. Trong hệ toạ độ vuông góc Oxy gắn với một đường tròn lượng giác, cho điểm P có toạ độ $(2\,;-3)$.

a) Chứng tỏ rằng điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$ là giao điểm của tia OP với đường tròn lượng giác đó.

b) Tính toạ độ của điểm M và từ đó suy ra côsin, sin của góc lượng giác (Ox, OP).



ĐIỀU LẠ : $\sin\left(\dfrac{180\pi}{180+\pi}\right)^{\circ}=\sin\left(\dfrac{180\pi}{180+\pi}\right)$!

Thật vậy, đặt $x=\dfrac{180\pi}{180+\pi}$ thì ta có

$$\sin x=\sin(\pi-x)=\sin\left(\pi-\frac{180\pi}{180+\pi}\right)=\sin\frac{\pi^2}{180+\pi}$$

$$=\sin\frac{\pi x}{180}=\sin x^{\circ}$$ (chú ý rằng $x^{\circ}=\dfrac{\pi x}{180}\,rad$).

Có thể thử lại **điều lạ** này nhờ máy tính bỏ túi CASIO *fx − 500MS* bằng cách ấn

180 [×] [SHIFT] π [÷] [(] 180 [+] [SHIFT] π [=] [SHIFT] [STO] [A]

[ON] [MODE] [MODE] [MODE] [1] [sin] [ALPHA] [A] [=]

Kết quả là 0,053 864 486.

Ấn tiếp :

[ON] [MODE] [MODE] [MODE] [2] [sin] [ALPHA] [A] [=]

Cho kết quả 0,053 864 486.

Các số $y = (2k+1)\dfrac{180\pi}{180+\pi} \quad (k \in \mathbb{Z}),$

$$z = l.\frac{360\pi}{180-\pi} \quad (l \in \mathbb{Z})$$

cũng có tính chất $\sin y = \sin y^{\circ}$, $\sin z = \sin z^{\circ}$.

§ 4 MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

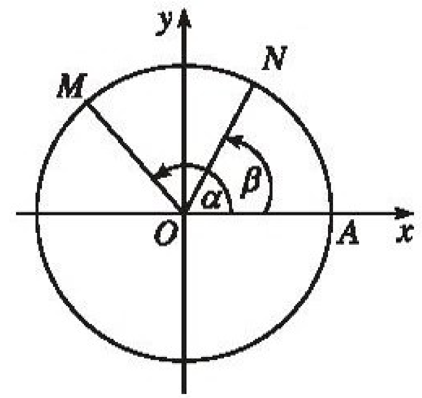
1. Công thức cộng

a) Công thức cộng đối với sin và côsin

Với mọi góc lượng giác α, β, ta có

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Chứng minh



Hình 6.25

1) Giả sử các điểm M và N trên đường tròn lượng giác theo thứ tự xác định bởi α và β (h.6.25) thì $\overrightarrow{OM}$ có toạ độ $(\cos\alpha\,;\,\sin\alpha)$, $\overrightarrow{ON}$ có toạ độ $(\cos\beta\,;\sin\beta)$ và tích vô hướng

$\overrightarrow{OM}\,.\,\overrightarrow{ON} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$

Mặt khác

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{ON}\right|\cos\widehat{NOM} = \cos\widehat{NOM},$$

mà đã biết

$$\cos\widehat{NOM} = \cos(ON, OM) = \cos[(OA, OM) - (OA, ON)] = \cos(\alpha - \beta)$$

nên suy ra

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

2) Từ 1) ta suy ra

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

3) Ta có

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right]$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

4) Ta có

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin[\alpha - (-\beta)] = \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Ví dụ 1. $\cos\frac{11\pi}{12} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\frac{\pi}{12}$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right).$$ □

H1 *Hãy kiểm nghiệm lại các công thức cộng nói trên với α tuỳ ý và*

a) $\beta = \pi$; *b)* $\beta = \frac{\pi}{2}$.

b) Công thức cộng đối với tang

Ta có

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

với mọi α, β làm cho các biểu thức có nghĩa.

Thực vậy

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta},$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan[\alpha-(-\beta)]=\frac{\tan\alpha-\tan(-\beta)}{1+\tan\alpha\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

Ví dụ 2. $\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}.$ □

H2 *Để các biểu thức ở công thức $\tan(\alpha+\beta)$ nói trên có nghĩa, điều kiện của α, β là các góc $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ không có dạng $\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. Điều đó có đúng không ?*

2. Công thức nhân đôi

Trong các công thức cộng nói trên, đặt $\alpha=\beta$ thì được các công thức sau đây gọi là các *công thức nhân đôi*.

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

(Trong công thức cuối $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \alpha\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$).

Ví dụ 3

a) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$

b) Với $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì $\cos 2\alpha \neq 0$ và ta có

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$= \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}.$$ □

CHÚ Ý

Từ trên ta suy ra

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \; ; \; \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Các công thức này gọi là các ***công thức hạ bậc***. (Chúng cho phép biến đổi các biểu thức của $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$ thành biểu thức của $\cos 2\alpha$).

Ví dụ 4. Tính côsin, sin, tang của góc $\frac{\pi}{12}$.

Giải. Ta có $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ nên $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$;

$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ nên $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$;

$\tan\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}.$ □

H3 *Hãy tính $\cos 4\alpha$ theo $\cos\alpha$.*

H4 *Đơn giản biểu thức*

$$\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha.$$

3. Công thức biến đổi tích thành tổng và biến đổi tổng thành tích

a) Công thức biến đổi tích thành tổng

Sử dụng công thức cộng, ta dễ dàng suy ra các công thức sau đây gọi là ***công thức biến đổi tích thành tổng.***

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right].$$

Ví dụ 5. Tính $\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{24}$.

Giải. Ta có $\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{24} = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{24}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{24}-\frac{\pi}{24}\right)\right]$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).$$ □

H5 *Hãy tính* $\cos\frac{7\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$.

b) Công thức biến đổi tổng thành tích

Trong các công thức biến đổi tích thành tổng trên đây, nếu đặt $\alpha+\beta=x$, $\alpha-\beta=y$ $\left(\text{tức là } \alpha=\frac{x+y}{2}, \beta=\frac{x-y}{2}\right)$ thì ta suy ra được các công thức sau đây gọi là ***công thức biến đổi tổng thành tích***.

$$\cos x+\cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Ví dụ 6. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{10}} - \dfrac{1}{\sin\dfrac{3\pi}{10}} = 2$.

Giải. Ta có

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{10}} - \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{10}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}}\left(\sin\frac{3\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}} 2\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{10}+\frac{\pi}{10}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{10}}{2}\right) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}} 2\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}$$

$$= 2\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{3\pi}{10}} = 2, \quad \left(\text{do } \cos\frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{10}\right).$$

Câu hỏi và bài tập

38. Hỏi mỗi khẳng định sau có đúng không ?

Với mọi α, β, ta có

a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha + \cos\beta$;   b) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha - \sin\beta$;

c) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;   d) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;

e) $\dfrac{\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha} = \tan 2\alpha$ (khi các biểu thức có nghĩa) ;

g) $\sin^2\alpha = \sin 2\alpha$.

39. Sử dụng $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, hãy tính các giá trị lượng giác của góc 75°.

Sử dụng $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, hãy tính các giá trị lượng giác của góc 15° (đối chiếu với kết quả bài tập 29).

40. Chứng minh rằng :

a) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

b) $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

c) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha}$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \alpha \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$;

d) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha}$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.

41. a) Biết $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ và $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, hãy tính các giá trị lượng giác của góc 2α và góc $\frac{\alpha}{2}\cdot$

b) Sử dụng $15^o = \frac{30^o}{2}$, hãy kiểm nghiệm lại kết quả của bài tập 39.

42. Chứng minh rằng :

a) $\sin\frac{11\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{3})$;

b) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = -\frac{1}{8}\cdot$ (*Hướng dẫn*. Nhân hai vế với $\sin\frac{\pi}{7}$) ;

c) $\sin 6^o \sin 42^o \sin 66^o \sin 78^o = \frac{1}{16}\cdot$ (*Hướng dẫn*. Nhân hai vế với $\cos 6^o$).

43. Dùng công thức biến đổi tích thành tổng, chứng minh :

a) $\cos 75^o \cos 15^o = \sin 75^o \sin 15^o = \frac{1}{4}$;

b) $\cos 75^o \sin 15^o = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$;

c) $\sin 75^o \cos 15^o = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$;

d) $\cos\alpha\sin(\beta - \gamma) + \cos\beta\sin(\gamma - \alpha) + \cos\gamma\sin(\alpha - \beta) = 0$, với mọi α, β, γ.

44. Đơn giản các biểu thức sau :

a) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; b) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

45. Chứng minh rằng :

a) $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = -\sqrt{3}$ nếu $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ và $\cos\alpha \neq \cos\beta$;

b) $\frac{\cos\alpha - \cos 7\alpha}{\sin 7\alpha - \sin\alpha} = \tan 4\alpha$ (khi các biểu thức có nghĩa).

Luyện tập

46. Chứng minh rằng :

a) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

b) $\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$;

$\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$.

Ứng dụng. Tính $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$ và $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ$.

47. Chứng minh rồi dùng máy tính bỏ túi hoặc bảng số để kiểm nghiệm lại gần đúng kết quả :

a) $\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$;

b) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$.

48. Chứng minh rằng

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

Hướng dẫn. Nhân vế trái với $\sin\frac{\pi}{7}$ (hoặc $\sin\frac{2\pi}{7}$) rồi sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng.

49. Chứng minh rằng, giá trị mỗi biểu thức sau không phụ thuộc vào x :

a) $\cos^2(\alpha + x) + \cos^2 x - 2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha + x)$;

b) $\sin 4x \sin 10x - \sin 11x \sin 3x - \sin 7x \sin x$.

50. Chứng minh rằng :

a) Nếu tam giác ABC có ba góc A, B, C thoả mãn $\sin A = \cos B + \cos C$ thì tam giác ABC vuông ;

b) Nếu tam giác ABC có ba góc A, B, C thoả mãn $\sin A = 2\sin B\cos C$ thì tam giác ABC cân.

51. Chứng minh rằng nếu $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ thì :

a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

b) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$;

c) $\sin2\alpha + \sin2\beta + \sin2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

d) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

52. a) Chứng minh rằng nếu α và β khác $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \text{ và } \tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

b) Chứng minh rằng với α mà $\cos k\alpha \neq 0$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ và $\sin\alpha \neq 0$ thì

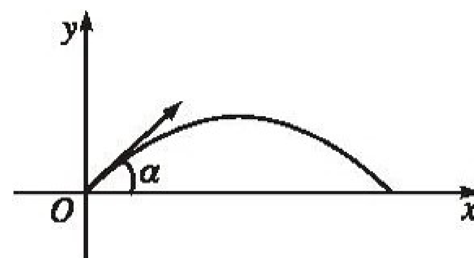
$$\frac{1}{\cos\alpha\cos2\alpha} + \frac{1}{\cos2\alpha\cos3\alpha} + \ldots + \frac{1}{\cos7\alpha\cos8\alpha} = \frac{\tan8\alpha - \tan\alpha}{\sin\alpha}.$$

53. Biết $\cos\alpha + \cos\beta = a$, $\sin\alpha + \sin\beta = b$ (a, b là các hằng số và $a^2 + b^2 \neq 0$), hãy tính $\sin(\alpha + \beta)$ theo a và b.

54. Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O, với vận tốc ban đầu là v (m/s), theo phương hợp với trục hoành Ox một góc α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, là parabol có phương trình

$$y = -\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x,$$

trong đó g là gia tốc trọng trường ($g \approx 9{,}8$ m/s^2) (giả sử lực cản của không khí không đáng kể). Gọi *tầm xa* của quỹ đạo là khoảng cách từ O đến giao điểm khác O của quỹ đạo với trục Ox (h.6.26).



Hình 6.26

a) Tính tầm xa theo α (và v).

b) Khi v không đổi, α thay đổi trong khoảng $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$, hỏi với giá trị α nào thì tầm xa của quỹ đạo đạt giá trị lớn nhất ? Tính giá trị lớn nhất đó theo v. Khi $v = 80$ m/s, hãy tính giá trị lớn nhất đó (chính xác đến hàng đơn vị).



LƯỢNG GIÁC VÀ NHÀ TOÁN HỌC Ơ-LE



Lê-ô-na Ơ-le
(*Leonhard Euler*, 1707 – 1783)

Như mọi khoa học khác, Lượng giác phát sinh từ nhu cầu của đời sống : Ngành Hàng hải đòi hỏi phải biết xác định vị trí của tàu bè ngoài biển khơi, vị trí của các hành tinh, của các vì sao ; cuộc sống xã hội với các hoạt động sản xuất đòi hỏi đo đạc ruộng đất, thiết lập bản đồ... . Các nhu cầu đó làm cho môn Lượng giác phát sinh và phát triển. Thời cổ, các nhà toán học Hi Lạp đã góp phần đáng kể vào việc phát triển môn Lượng giác. Lê-ô-na Ơ-le là người đã xây dựng lí thuyết sâu sắc về lượng giác trong cuốn "Mở đầu về giải tích các đại lượng vô cùng bé" xuất bản năm 1748. Trong công trình đó, Ơ-le đã đề cập khái niệm rađian, nhưng từ "rađian" (gắn với từ "radius" có nghĩa là bán kính) mãi đến năm 1873 mới được dùng chính thức lần đầu tiên ở Đại học Ben-phát (Belfast), Bắc Ai-len.

Ơ-le là một trong những nhà toán học lớn nhất từ xưa đến nay. Ông sinh tại Ba-lơ, Thuỵ Sĩ. Ông đã tiến hành nghiên cứu nhiều đề tài khoa học thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau như cơ học, âm nhạc, thiên văn... Hầu hết mọi ngành toán học đều mang dấu ấn các kết quả nghiên cứu của ông. Ơ-le là người say mê, cần cù trong công việc. Cuối đời dù bị mù cả hai mắt, ông vẫn tiếp tục hoạt động sáng tạo. Trong cuộc đời mình, Ơ-le đã viết trên 800 công trình khoa học. Số công trình của ông ít ai sánh kịp.

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương VI

55. Hỏi mỗi đẳng thức sau có đúng với mọi số nguyên k không ?

a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$;

b) $\cos(k\pi) = (-1)^k$;

c) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\right) = (-1)^k$;

d) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\right) = (-1)^k \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

56. Tính :

a) $\sin\alpha$, $\cos2\alpha$, $\sin2\alpha$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ và $\sin\frac{\alpha}{2}$, biết $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$;

b) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, biết $\cos\alpha = -\frac{9}{11}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

c) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, biết $\cos2\alpha = \frac{3}{5}$;

d) $\cos(\alpha - \beta)$, biết $\sin\alpha - \sin\beta = \frac{1}{3}$ và $\cos\alpha - \cos\beta = \frac{1}{2}$;

e) $\sin\frac{\pi}{16}\sin\frac{3\pi}{16}\sin\frac{5\pi}{16}\sin\frac{7\pi}{16}$.

57. Chứng minh rằng :

a) $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos2\alpha$;

b) $\sin\alpha(1 + \cos2\alpha) = \sin2\alpha\cos\alpha$;

c) $\frac{1 + \sin2\alpha - \cos2\alpha}{1 + \sin2\alpha + \cos2\alpha} = \tan\alpha$ (khi các biểu thức có nghĩa) ;

d) $\tan\alpha - \frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{2}{\tan2\alpha}$ (khi các biểu thức có nghĩa).

58. Chứng minh rằng :

a) Nếu $\alpha + \beta + \gamma = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ và $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \neq 0$ thì

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\ ;$$

b) Nếu $0 < \alpha < \beta < \gamma < \frac{\pi}{2}$ và $\tan\alpha = \frac{1}{8}$, $\tan\beta = \frac{1}{5}$, $\tan\gamma = \frac{1}{2}$ thì $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$;

c) $\frac{1}{\sin10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos10^\circ} = 4$.

59. Chứng minh rằng với mọi α, β, γ, ta có

$$\cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) + \cos(\beta + \gamma)\sin(\beta - \gamma) + \cos(\gamma + \alpha)\sin(\gamma - \alpha) = 0.$$

Trong các bài từ 60 đến 69 hãy chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho :

60. Nếu $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ thì $\sin 2\alpha$ bằng :

(A) $\dfrac{3}{8}$; (B) $-\dfrac{3}{4}$; (C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; (D) $\dfrac{3}{4}$.

61. Với mọi α, $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ bằng :

(A) $\sin\alpha$; (B) $-\sin\alpha$; (C) $-\cos\alpha$; (D) $\cos\alpha$.

62. $\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{\pi}{10}+\sin\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{\pi}{15}}{\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{\pi}{5}-\sin\dfrac{2\pi}{15}\sin\dfrac{\pi}{5}}$ bằng :

(A) $\sqrt{3}$; (B) 1 ; (C) -1 ; (D) $\dfrac{1}{2}$.

63. $\cos\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{7\pi}{12}$ bằng :

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; (C) $\dfrac{1}{2}$; (D) $-\dfrac{1}{4}$.

64. $\sin\dfrac{90^o}{4}\cos\dfrac{270^o}{4}$ bằng :

(A) $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; (B) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1\right)$; (C) $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; (D) $\sqrt{2}-1$.

65. $\dfrac{\cos 80^o - \cos 20^o}{\sin 40^o \cos 10^o + \sin 10^o \cos 40^o}$ bằng :

(A) 1 ; (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (C) -1 ; (D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

66. Góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α mà $\widehat{uOv}$ là góc nhọn thì :

(A) $0 \le \alpha < \dfrac{\pi}{2}$; (B) $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha < \dfrac{\pi}{2}$; (C) $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha \le 0$;

(D) Có số nguyên k để $-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi < \alpha < \dfrac{\pi}{2}+k2\pi$.

67. Góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α mà $\widehat{uOv}$ là góc tù thì :

(A) Có số nguyên k để $\frac{\pi}{2} + k2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + k2\pi$; (B) $-\pi \leq \alpha < -\frac{\pi}{2}$;

(C) $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$; (D) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

68. Với góc lượng giác (OA, OM) có số đo α, xét góc lượng giác (OA, ON) có số đo $\frac{\alpha}{2}$ (M và N cùng nằm trên đường tròn lượng giác gốc A). Khi đó, với mọi α sao cho M nằm trong góc phần tư III của hệ toạ độ gắn với đường tròn đó (M không nằm trên các trục toạ độ), điểm N luôn :

(A) Nằm trong góc phần tư I ;

(B) Nằm trong góc phần tư II ;

(C) Nằm trong góc phần tư III ;

(D) Không nằm trong các góc phần tư I và III.

69. Với góc lượng giác (OA, OM) có số đo α, xét góc lượng giác (OA, ON) có số đo 2α (M và N cùng nằm trên đường tròn lượng giác gốc A). Khi đó, với mọi α sao cho M nằm trong góc phần tư I của hệ toạ độ gắn với đường tròn đó (M không nằm trên các trục toạ độ), điểm N luôn :

(A) Nằm trong góc phần tư I ; (B) Nằm trong góc phần tư II ;

(C) Nằm trong góc phần tư III ; (D) Không nằm trong góc phần tư IV.

Câu hỏi và bài tập ôn tập cuối năm

1. Cho các tập con $A = [-1 ; 1]$, $B = [a ; b)$ và $C = (-\infty ; c]$ của tập số thực $\mathbb{R}$, trong đó a, b $(a < b)$ và c là những số thực.

a) Tìm điều kiện của a và b để $A \subset B$;

b) Tìm điều kiện của c để $A \cap C = \varnothing$;

c) Tìm phần bù của B trong $\mathbb{R}$;

d) Tìm điều kiện của a và b để $A \cap B \neq \varnothing$.

2. Tìm tập xác định và xét tính chẵn - lẻ của mỗi hàm số sau :

a) $f_1(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$; b) $f_2(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$;

c) $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{4x^2 - 9}$; d) $f_4(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$.

3. Cho hai đường thẳng $(d_1) : y = mx - 3$ và $(d_2) : x + y = m$.

a) Với giá trị nào của m thì $(d_1) // (d_2)$?

b) Với giá trị nào của m thì $(d_1) \perp (d_2)$?

c) Tìm điều kiện của m để hai đường thẳng cắt nhau.

4. Kí hiệu (H_0) là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2}{x}$.

a) Tại sao (H_0) có tâm đối xứng là gốc toạ độ O ?

b) Xác định phép tịnh tiến biến (H_0) thành đồ thị (H_1) của hàm số $y = \dfrac{2}{x-3}$.

Tìm toạ độ tâm đối xứng của (H_1).

c) Xác định phép tịnh tiến biến (H_0) thành đồ thị (H_2) của hàm số $y = \dfrac{2-2x}{x}$.

Tìm toạ độ tâm đối xứng của (H_2).

5. a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 + x - 6$.

b) Biện luận theo m số giao điểm của (P) với đường thẳng $(d) : y = 2x + m$.

c) Khi (d) và (P) cắt nhau, gọi A và B là hai giao điểm, hãy tìm toạ độ trung điểm của đoạn thẳng AB.

6. Cho phương trình

$$2x^2 + (k-9)x + k^2 + 3k + 4 = 0. \quad (*)$$

a) Tìm k, biết rằng (*) có hai nghiệm trùng nhau.

b) Tính nghiệm gần đúng của (*) với $k = -\sqrt{7}$ (chính xác đến hàng phần nghìn).

7. Cho phương trình $x^2 + 2(\sqrt{3}+1)x + 2\sqrt{3} = 0$.

a) Không giải phương trình, tính gần đúng tổng các bình phương hai nghiệm của phương trình đã cho (chính xác đến hàng phần trăm).

b) Tìm nghiệm gần đúng của phương trình đó (chính xác đến hàng phần trăm).

8. Biện luận theo tham số m số nghiệm và dấu các nghiệm của mỗi phương trình sau :

a) $x^2 - 4(m+3)x + 6(m^2 - 5m + 6) = 0$; b) $(m-1)x^2 - (m-3)x - m - 3 = 0$.

9. Giải và biện luận các phương trình :

a) $\dfrac{mx - m - 3}{x+1} = 1$; b) $|(m+1)x - 3| = |x+2|$; c) $(mx+1)\sqrt{x-1} = 0$.

10. a) Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn các hệ thức :

$$x_1 + x_2 + x_1x_2 = 0 \quad \text{và} \quad m(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 3m + 4.$$

b) Xét dấu các nghiệm của phương trình đó tuỳ theo m.

11. Giải và biện luận các hệ phương trình :

a) $\begin{cases}(m+3)x + 2y = m \\ (3m+1)x + (m+1)y = 1\end{cases}$; b) $\begin{cases}(2m+3)x + 5y = m - 11 \\ (m+2)x + 2y = m - 2.\end{cases}$

12. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases}x^2 - 5xy + y^2 = 7 \\ 2x + y = 1\end{cases}$; b) $\begin{cases}x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x + y + xy = 5\end{cases}$; c) $\begin{cases}x^2 + y^2 - x + y = 2 \\ xy + x - y = -1.\end{cases}$

13. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{a^2 + 6}{\sqrt{a^2 + 2}} \geq 4 \ (a \in \mathbb{R})$; b) $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \geq \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{a} \ (a, b, c \in \mathbb{R}^*)$.

14. Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $f(x) = x + \dfrac{2}{x+2}$ trên khoảng $(-2 ; +\infty)$;

b) $g(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

15. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = (2-x)(2x+1)$ trên khoảng $(-0{,}5 ; 2)$.

16. Giải các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases}x^2 - 4 > 0 \\ \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} \geq \dfrac{1}{x}\end{cases}$; b) $\begin{cases}x^2 + 3x + 2 < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} \geq 0.\end{cases}$

17. Giải các phương trình :

a) $\sqrt{2x+8} = 3x + 4$; b) $|x^2 + 5x + 6| = 3x + 13$; c) $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 4) = 5$.

18. Giải các bất phương trình :

a) $3x^2 - |5x + 2| > 0$; b) $\sqrt{2x^2 + 7x + 5} > x + 1$;

c) $\sqrt{x^2 + 4x - 5} \leq x + 3$.

19. Trong kì thi Tiếng Anh, điểm thi của 32 học sinh (thang điểm 100) như sau :

68	79	65	85	52	81	55	65	49	42	68	66	56	57	65	72
69	60	50	63	74	88	78	95	41	87	61	72	59	47	90	74

a) Tính số trung bình (chính xác đến hàng phần trăm).

b) Tính số trung vị.

c) Hãy trình bày mẫu số liệu trên dưới dạng bảng phân bố tần số ghép lớp với các nửa khoảng [40 ; 50) ; [50 ; 60) ; ... ; [90 ; 100).

20. Một siêu thị thu thập được các số liệu sau đây về số tiền (đơn vị : nghìn đồng) mà mỗi người đã mua ở đây.

Lớp	**Tần số**
[0 ; 99]	20
[100 ; 199]	80
[200 ; 299]	70
[300 ; 399]	30
[400 ; 499]	10
	$N = 210$

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì ?

b) Tìm số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn (chính xác đến hàng phần trăm).

21. Tuổi của 60 cán bộ trong một cơ quan được thống kê và trình bày trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau :

Lớp	**Tần số**
[20 ; 30)	13
[30 ; 40)	26
[40 ; 50)	15
[50 ; 60)	6
	$N = 60$

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì ?

b) Lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp.

c) Tìm số trung bình.

d) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn (chính xác đến hàng phần trăm).

e) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

f) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt.

22. a) Biết $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{3}{4}$ và các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi số α và β nằm ở góc phần tư II. Hãy tính $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$.

b) Cho $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$. Hãy tính các giá trị lượng giác của α.

23. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+a\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}-a\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2a$;

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{3}{2}$;

c) $\tan\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\tan\alpha\tan\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \tan 3\alpha$ (khi các biểu thức có nghĩa).

Ứng dụng. Tính $\tan 10^\circ \tan 50^\circ \tan 110^\circ$.

24. Chứng minh rằng :

a) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$;

b) $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$ (khi các biểu thức có nghĩa).

25. Tìm các số C và β sao cho $\sin\alpha + \cos\alpha = C\sin(\alpha+\beta)$ với mọi α.

Hướng dẫn và đáp số

Chương 1

1. a) Không là mệnh đề. b), c) Mệnh đề sai.

2. a), b), c) Mệnh đề phủ định sai.

4. $P(5)$ là mệnh đề đúng, $P(2)$ là mệnh đề sai.

6. Mệnh đề đảo đúng. **17.** a) Đúng ; b) Đúng ; c) Sai ; d) Sai ; e) Đúng ; g) Sai.

19. a) Đúng ; b) Đúng ; c) Sai ; d) Đúng. **20.** (B).

21. (A). **22.** a) $A = \{0 ; 2 ; -\frac{1}{2}\}$; b) $B = \{2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.

24. Không bằng nhau. **25.** $B \subset A, C \subset A, C \subset D$.
27. $F \subset E \subset C \subset B \subset A$; $F \subset D \subset C \subset B \subset A$; $D \cap E = F$. **29.** a) Sai ; b) Đúng ; c) Sai ; d) Đúng.
30. $A \cup B = [-5 ; 2)$; $A \cap B = (-3 ; 1]$.
31. $A = \{1 ; 5 ; 7 ; 8 ; 3 ; 6 ; 9\}$, $B = \{2 ; 10 ; 3 ; 6 ; 9\}$.

32. $A \cap (B \setminus C) = \{2 ; 9\}$; $(A \cap B) \setminus C = \{2 ; 9\}$.

34. a) A ; b) $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 8 ; 10\}$. **35.** a) Sai ; b) Đúng. **36.** a) $\{a ; b ; c\}$, $\{a ; b ; d\}$, $\{b ; c ; d\}$, $\{a ; c ; d\}$; b) $\{a ; b\}$, $\{a ; c\}$, $\{a ; d\}$, $\{b ; c\}$, $\{b ; d\}$, $\{c ; d\}$; c) $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\varnothing$.

37. $b - 2 \le a \le b + 1$. **38.** (D). **39.** $A \cup B = (-1 ; 1)$; $A \cap B = \{0\}$; $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty ; -1] \cup (0 ; +\infty)$;

41. $C_{\mathbb{R}}(A \cup B) = (-\infty ; 0] \cup [4 ; +\infty)$;

$C_{\mathbb{R}}(A \cap B) = (-\infty ; 1) \cup (2 ; +\infty)$.

42. (B). **43.** $\Delta < 0,0014$.

46. a) $\sqrt[3]{2} \approx 1,26$; $\sqrt[3]{2} \approx 1,260$.

b) $\sqrt[3]{100} \approx 4,64$; $\sqrt[3]{100} \approx 4,642$. **47.** $9,4608.10^{12}$ (km). **48.** $9,9773.10^{6}$(s). **49.** $5,475.10^{12}$ ngày.

50. (D). **55.** a) $A \cap B$; b) $A \setminus B$; c) $C_{\mathbb{E}}A \cup C_{\mathbb{E}}B$.

60. Nếu $m = 5$ thì $A \cap B = \{5\}$. Nếu $m < 5$ thì $A \cap B = \varnothing$. Nếu $m > 5$ thì $A \cap B = [5 ; m]$.
61. $2 < m < 5$ thì $A \cup B$ là một khoảng ; $A \cup B = (m ; 5)$ nếu $2 < m \le 3$; $A \cup B = (3 ; 5)$ nếu $3 < m \le 4$; $A \cup B = (3 ; m + 1)$ nếu $4 < m < 5$.

62. a) $1,2.10^{13}$; b) $1,6.10^{22}$; c) 3.10^{13}.

Chương 2

1. a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R} \setminus \{1 ; 2\}$; c) $[1 ; 2) \cup (2 ; +\infty)$; d) $(-1 ; +\infty)$. **2.** $\{2000 ; 2001 ; 2002 ; 2003 ; 2004 ; 2005\}$; $f(2000) = 3,48$; $f(2001) = 3,72$; $f(2002) = 3,24$; ... ; $f(2005) = 5,20$. **4.** a) nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; -1)$; đồng biến trên khoảng $(-1 ; +\infty)$. b) đồng biến trên $(-\infty ; 1)$; nghịch biến trên $(1 ; +\infty)$. c) nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 3)$ và $(3 ; +\infty)$.

5. a) Hàm số chẵn ; b) Hàm số lẻ ; c) Hàm số lẻ ; d) Hàm số chẵn. **6.** a) $y = 0,5x + 3$; b) $y = 0,5x - 1$; c) $y = 0,5(x - 2)$; d) $y = 0,5(x + 6)$. **7.** Không xác định một hàm số. **8.** a) Có điểm chung khi $a \in \mathcal{D}$; không có điểm chung khi $a \notin \mathcal{D}$; b) Có không quá một điểm chung ; c) Không là đồ thị của hàm số nào cả. **9.** a) $x \neq \pm 3$; b) $-1 \neq x \le 0$; c) $(-2 ; 2]$; d) $[1 ; 4] \setminus \{2 ; 3\}$.
10. a) $[-1 ; +\infty)$; b) $f(-1) = 6$, $f(0,5) = 3$, $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 4 - \sqrt{2}$, $f(1) = 0$, $f(2) = \sqrt{3}$. **11.** A, B, C không thuộc đồ thị ; D thuộc đồ thị. **12.** a) Nghịch biến trên $(-\infty ; 2)$ và $(2 ; +\infty)$. b) Nghịch biến trên $(-\infty ; 3)$; đồng biến trên $(3 ; +\infty)$. c) Đồng biến trên $(-\infty ; +\infty)$. **13.** b) Nghịch biến trên $(0 ; +\infty)$ và $(-\infty ; 0)$. **14.** Không chẵn, không lẻ.
15. a) Tịnh tiến (d) xuống dưới 3 đơn vị. b) Tịnh tiến (d) sang phải 1,5 đơn vị.

16. a) $y = \frac{-2+x}{x}$; b) $y = -\frac{2}{x+3}$; c) $y = \frac{x+1}{x+3}$.

17. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$ và $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 1$;

$y = \frac{2}{\sqrt{2}}x + 2$ và $y = \sqrt{2}x - 2$;

$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 3$ và $y = -(\frac{\sqrt{2}}{2}x - 1)$.

18. a) $[-2 ; 3]$. **19.** b) Tịnh tiến đồ thị của f_1 sang trái 2,5 đơn vị. **20.** Không.

21. a) $y = -1,5x + 2$. **22.** $y = -x + 3$; $y = -x - 3$; $y = x + 3$ và $y = x - 3$.

23. a) $y = 2|x| + 3$; b) $y = 2|x + 1|$; c) $y = 2|x - 2| - 1$.

25. a) $f(x) = \begin{cases} 6x & \text{nếu } 0 \le x \le 10 \\ 2,5x + 35 & \text{nếu } x > 10 \end{cases}$;

b) $f(8) = 48$; $f(10) = 60$; $f(18) = 80$.

26. a) $y = \begin{cases} -x + 5 & \text{nếu } x < -1 \\ -5x + 1 & \text{nếu } -1 \le x < 1 \\ x - 5 & \text{nếu } x \ge 1 \end{cases}$

28. a) $y = x^2 - 1$; b) $y = -\dfrac{3}{4}x^2 + 3$.

29. a) $y = -\dfrac{5}{9}(x + 3)^2$; b) $y = (x - 1)^2$.

30. a) Tịnh tiến parabol $y = x^2$ sang phải 4 đơn vị, rồi xuống dưới 4 đơn vị. b) Tịnh tiến parabol $y = -3x^2$ sang trái 2 đơn vị, rồi lên trên 21 đơn vị.

31. a) Đỉnh là $I(-1 ; 8)$; trục đối xứng $x = -1$. c) $y \ge 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 1$. **32.** b) $f(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$; $g(x) > 0 \Leftrightarrow x < -4$ hoặc $x > 2$. c) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $x > 3$; $g(x) < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 2$.

33. Xem bảng sau :

Hàm số	*Hàm số có giá trị lớn nhất / nhỏ nhất khi x = ?*	*Giá trị lớn nhất*	*Giá trị nhỏ nhất*
$y = 3x^2 - 6x + 7$	$x = 1$		4
$y = -5x^2 - 5x + 3$	$x = -0,5$	4,25	
$y = x^2 - 6x + 9$	$x = 3$		0
$y = -4x^2 + 4x - 1$	$x = 0,5$	0	

34. a) $a > 0$ và $\Delta < 0$; b) $a < 0$ và $\Delta < 0$; c) $a < 0$ và $\Delta > 0$. **37.** a) $f(t) = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$; b) $\approx 8,794$ (m). c) $\approx 2,58$ (giây). **38.** a) $f(x) = ax^2 + bx$; $a = -\dfrac{43}{1520}$, $b = \dfrac{3483}{760}$. b) ≈ 186 (m). **39.** a) (B) ; b) (A) ; c) (C). **40.** a) $b = 0$, $a \ne 0$ tuỳ ý ; b) $b = 0$, $a \ne 0$ tuỳ ý, c tuỳ ý. **41.** a) $a < 0$; $c > 0$; $b < 0$; b) $a > 0$; $c > 0$; $b < 0$; c) $a > 0$; $c = 0$; $b > 0$. d) $a < 0$; $c < 0$; $b > 0$.

42. a) $(0 ; -1)$ và $(3 ; 2)$; b) $(-1 ; 4)$ và $(-2 ; 5)$; c) $(3 - \sqrt{5} ; 1 - 2\sqrt{5})$ và $(3 + \sqrt{5} ; 1 + 2\sqrt{5})$.

43. $y = x^2 - x + 1$.

45. $S(x) = \begin{cases} 3x & \text{nếu } 0 \le x < 2 \\ 5x - 4 & \text{nếu } 2 \le x < 6 \\ 7x - 16 & \text{nếu } 6 \le x \le 9 \end{cases}$

46. a) $y = 0,03x^2 - 7$; b) Thoả mãn.

Chương 3

1.

Phương trình	*Điều kiện của phương trình*	*Tập nghiệm*
a)	$x = 0$	$\{0\}$
b)	$x = 2$	$\{2\}$
c)	$x \ge 3, x \le 3$ và $x \ne 3$	$\varnothing$
d)	$x \ge 1$ và $x \le 0$	$\varnothing$

2. a) $x = 2$; b) Vô nghiệm ; c) $x = 6$; d) Vô nghiệm. **3.** a) $x = 2$; b) Vô nghiệm ; c) $x = 3$; d) $x \in \{-1 ; 2\}$. **4.** a) $x = 4$; b) $x = 5$; c) $x = 0$, $x = 4$; d) $x = 1$. **5.** a) Sai ; b) Sai.

6. a) $x = \dfrac{2m - 3}{m^2 + 1}$; b) $S = \mathbb{R}$ $(m = 1)$, $S = \{m + 2\}$ $(m \ne 1)$; c) $S = \varnothing$ $(m \ne 2 ; 3)$, $S = \mathbb{R}$ $(m = 2 ; 3)$;

d) $x = \dfrac{m}{m - 2}$ $(m \ne 1; 2)$, $S = \mathbb{R}$ $(m = 1)$, $S = \varnothing$ $(m = 2)$.

7. a) $(a = 0, b \ne 0)$ hoặc $(a \ne 0, \Delta = 0)$;
b) $(a = b = 0, c \ne 0)$ hoặc $(a \ne 0, \Delta < 0)$.

8. a) $x = \dfrac{1}{3}$ $(m = 1)$, vô nghiệm $(m < -\dfrac{5}{4})$,

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{4m + 5}}{2(m - 1)}$ $(-\dfrac{5}{4} \le m \ne 1)$;

b) $x = 2 \pm \sqrt{7 - m}$ $(m \le 7)$, vô nghiệm $(m > 7)$.

9. b) $f(x) = (x + 4)(1 - 2x)$;

$g(x) = \left(x - \sqrt{2}\right)\left[\left(\sqrt{2} + 1\right)x - \sqrt{2}\right]$.

10. a) 34 ; b) 98 ; c) 706. **11.** (B).

12. a) $x = \dfrac{m + 3}{m + 2}$ $(m \ne -2)$, vô nghiệm $(m = -2)$;

b) $x = \dfrac{m+1}{3}$ $(m \neq 1)$, mọi x $(m = 1)$;

c) $x = \dfrac{5m+1}{3m+1}$ $(m \neq -\dfrac{1}{3})$, vô nghiệm $(m = -\dfrac{1}{3})$;

d) $x = \dfrac{3}{m+2}$ $(m \neq \pm 2)$, vô nghiệm $(m = -2)$, $S = \mathbb{R}$ $(m = 2)$.

13. a) $p = 0$; b) $p = 2$. **14.** a) $x \approx 4{,}00$; $x \approx 1{,}60$; b) $x \approx 0{,}38$; $x \approx -5{,}28$. **15.** 37m, 35m và 12 m.

16. a) $x = \dfrac{12}{7}$ $(m = 1)$, $x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{1+48m}}{2(m-1)}$ $(-\dfrac{1}{48} \leq m \neq 1)$, vô nghiệm $(m < -\dfrac{1}{48})$;

b) $x = \dfrac{1}{6}$ $(m = 0)$, $x = \dfrac{m+3 \pm \sqrt{5m+9}}{m}$ $(-\dfrac{9}{5} \leq m \neq 0)$, vô nghiệm $(m < -\dfrac{9}{5})$;

c) $S = \{1, \dfrac{1}{k+1}\}$ $(k \neq -1)$, $S = \{1\}$ $(k = -1)$;

d) $x = 1$ $(m = 0)$; $x = 4$ $(m = \dfrac{1}{2})$; $x = \dfrac{2}{m}$, $x = -\dfrac{1}{2m-1}$ $(m \neq 0$ và $m \neq \dfrac{1}{2})$.

17. Không có điểm chung $(m < -3{,}5)$, một điểm chung $(m = -3{,}5)$, hai điểm chung $(m > -3{,}5)$. **18.** $m = 3$. **19.** $m = \pm 4$. **20.** a) Vô nghiệm ; b) Hai nghiệm đối nhau ; c) 4 nghiệm ; d) 3 nghiệm. **21.** a) $k > -1$; b) $k > 0$. **22.** a) $x = 2$; b) $x = 4$, $x = -7$. **23.** a) $x \neq 4$ $(m = 3)$; b) Vô nghiệm $(m = -2)$, $x = \dfrac{4m+9}{m+2}$ $(m \neq -2$, $m \neq 3)$. **24.** a) $S = \varnothing$ $(a = 0)$; $S = \left\{\dfrac{1}{a} ; -\dfrac{4}{a}\right\}$ $(a \neq 0)$; b) $S = \varnothing$ $(m \leq 1)$; $S = \{3\}$ $(m = 2)$; $S = \{m - \sqrt{m-1}\ ;\ m + \sqrt{m-1}\}$ $(1 < m \neq 2)$.

25. a) $x = -\dfrac{1}{2}$ $(m = 0)$, $x = -\dfrac{3}{2}$ $(m = 2)$, $x = \dfrac{1}{m-2}$ và $x = -\dfrac{3}{m}$ $(m \neq 0, m \neq 2)$; b) $x = 1$ $(a = 0)$, $x = 4$ $(a = 1)$, $x = 2(a+1)$ và $x = a + 1$ $(a \neq 0, a \neq 1)$; c) $x = \dfrac{m+4}{m-1}$ $(m \neq 1, m \neq -\dfrac{3}{2})$; vô nghiệm $(m = 1,\ m = -\dfrac{3}{2})$; d) $x = 0$ $(k = -3$, $k = -9)$; $x = 0$ và $x = -k - 6$ $(k \neq -3, k \neq -9)$.

26. a) $x = \dfrac{7}{4}$ $(m = \dfrac{1}{2})$; $x = \dfrac{1}{2}(4 - m)$ và $x = \dfrac{m}{1-2m}$ $(m \neq \dfrac{1}{2})$; b) $x = \dfrac{1}{m+1}$, $x = \dfrac{1}{m+3}$ $(m \neq -1,\ m \neq -3)$; $x = \dfrac{1}{2}$ $(m = -1)$; $x = -\dfrac{1}{2}$ $(m = -3)$; c) $S = \left\{1 ; -\dfrac{1}{m}\right\}$ $(-1 < m < 0)$, $S = \{1\}$ $(m \leq -1$ hoặc $m \geq 0)$; d) $S = \varnothing$ $(a = 2, a = \dfrac{1}{2})$; $x = \dfrac{4a-5}{a-2}$ $(a \neq 2, a \neq \dfrac{1}{2})$;

e) $x = 2m + 2$ $(m \neq -\dfrac{5}{2})$; $S = \varnothing$ $(m = -\dfrac{5}{2})$;

f) $S = \varnothing$ $(a \leq 0)$; $x = \dfrac{a-1}{2a}$ $(a > 0)$.

27. a) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{14}}{2}$; b) $x \in \{-5 ; -2 ; 1\}$; c) $x \in \left\{-1 ; -\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2} ; 1\right\}$

28. $m \in \{-1 ; -\dfrac{1}{2} ; 1\}$. **29.** $a \in \{-2 ; -1 ; -\dfrac{1}{2} ; 0\}$.

30. (C). **31.** a) $\left(-\dfrac{5}{17} ; -\dfrac{19}{17}\right)$; b) $\left(\sqrt{3} ; -2\sqrt{2}\right)$.

32. a) $(1 ; 0)$; b) $\left(x ; \dfrac{5}{2}x\right)$ với $x \in \mathbb{R}^*$.

33. a) $\left(\dfrac{m}{m-1} ; \dfrac{1}{m-1}\right)$ $(m \neq \pm 1)$, $S = \varnothing$ $(m = 1)$; $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -x \end{cases}$ $(m = -1)$;

b) $\left(-\dfrac{5}{a+3} ; \dfrac{5(a+1)}{a+3}\right)$ $(a \neq -3)$, $S = \varnothing$ $(a = -3)$.

34. $(x ; y ; z) = (4 ; 5 ; 2)$. **35.** $I_1 \approx 1{,}33$ A ; $I_2 \approx 0{,}74$ A ; $I_3 \approx 0{,}59$ A. **36.** (B). **37.** a) $x \approx 0{,}42$; $y \approx -0{,}27$; b) $x \approx -0{,}07$; $y \approx 1{,}73$. **38.** $240 - 2p$ (mét) và $3p - 240$ (mét) với điều kiện $80 < p < 120$.

39. a) $(2\,;-\frac{1}{m})$ $(m\neq 0,\ m\neq -3)$; vô nghiệm $(m=0)$; $(3y+1\,;\,y),\ y\in\mathbb{R}$ $(m=-3)$;

b) $\left(\frac{-m+2}{m+1};\frac{m+4}{m+1}\right)$ $(m\neq -1,\ m\neq 2)$; vô nghiệm $(m=-1)$; $\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ y=2(1-x)\end{cases}$ $(m=2)$.

40. a) $a\neq 0$; b) $a\neq -1$. **41.** 7 cặp số : (1 ; 6), (−1 ; −6), (6 ; 1), (−6 ; −1), (2 ; 3), (−2 ; −3) và (−3 ; −2). **42.** a) $m\neq\pm 2$; b) $m=-2$; c) $m=2$.

43. (4 ; 2 ; 5). **44.** a) $f(x)=1\,500+1,2x$; $g(x)=2000+x$; c) $M\,(2500\,;4500)$.

45. a) (10 ; 8), (−8 ; −10) ; b) (1 ; −1), $\left(-\frac{2}{5};\frac{9}{5}\right)$. **46.** a) (1 ; 2), (2 ; 1) ; b) (0 ; 1), (−1 ; 0) ; c) (0 ; 0), (5 ; 5), (−1 ; 2), (2 ; −1). **47.** $S^2-4P\geq 0$.

48. a) (−8 ; −12), (−12 ; −8), (8 ; 12) và (12 ; 8) ; b) (8 ; 3), (−8 ; −3). **49.** $f_1(x)=x^2+3x-4$, $f_2(x)=-\frac{25}{21}x^2+\frac{155}{21}x-4$. **50.** $a\neq 0$, hoặc $a=b=0$. **51.** $S=S_1\cup S_2$. **52.** $D\neq 0$, hoặc $D=D_x=D_y=0$. *Áp dụng :* $a\neq -1$.

53. (B). **54.** $x=\frac{1}{m-1}$ $(m\neq\pm 1)$; $S=\varnothing$ $(m=1)$; $S=\mathbb{R}$ $(m=-1)$. **55.** a) $p=-1$, $p=2$; b) p tuỳ ý ; c) Không có p. **56.** 3 ; 4 ; 5.

57. a) Vô nghiệm $(m<0)$; $x=1$ $(m=0)$; $x=\frac{1}{2}$ $(m=1)$; $x=\frac{-1\pm\sqrt{m}}{m-1}$ $(0<m\neq 1)$. b) $m>1$; c) $m=2+\sqrt{5}$. **58.** $a=-2$.

59. a) • (1) vô nghiệm $(m<-1,25)$; một nghiệm $(m=-1,25)$; hai nghiệm $(m>-1,25)$; • (2) vô nghiệm $(p<\frac{7}{16})$; một nghiệm $(p=\frac{7}{16})$; hai nghiệm $(p>\frac{7}{16})$. **60.** a) $S=\{(1\,;2),(2\,;1),(-1\,;-2),(-2\,;-1)\}$; b) $S=\{(1\,;-1),(-1\,;1),(0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}),(0\,;-\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{2}}\,;0),(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;0)\}$.

61. a) $x=\frac{m-4}{m-3}$, $y=\frac{1}{m-3}$ $(m\neq 3$ và $m\neq -2)$; vô nghiệm $(m=3)$; $\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ y=\frac{2}{3}x-1\end{cases}$ $(m=-2)$. b) $x=y=\frac{a}{a+3}$ $(a\neq -3,\ a\neq 7)$; vô nghiệm $(a=-3)$; $\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ y=-x+\frac{7}{5}\end{cases}$ $(a=7)$. **62.** a) $\begin{cases}x=2-\sqrt{4-m}\\ y=2+\sqrt{4-m},\end{cases}$ $\begin{cases}x=2+\sqrt{4-m}\\ y=2-\sqrt{4-m}\end{cases}$. b) Vô nghiệm $(m<\frac{1}{13})$; $(\frac{3}{13}\,;-\frac{2}{13})$ $(m=\frac{1}{13})$;

$\left(\frac{3-2\sqrt{13m-1}}{13}\,;\,\frac{-2-3\sqrt{13m-1}}{13}\right)$ và

$\left(\frac{3+2\sqrt{13m-1}}{13}\,;\,\frac{-2+3\sqrt{13m-1}}{13}\right)$ $(m>\frac{1}{13})$.

63. $a=1$; $b=-2$; $c=-3$. **64.** + Khi tam giác *ABC* cân tại *A* và $l\neq AB$, không có điểm *M* nào trên cạnh *BC* thoả mãn điều kiện của bài toán.

+ Khi tam giác *ABC* cân tại *A* và $l=AB$ thì mọi điểm *M* trên cạnh *BC* đều thoả mãn điều kiện của bài toán. + Khi tam giác *ABC* không cân ở *A* và $c<l<b$ hoặc $c>l>b$ thì điểm *M* cách *B* một khoảng bằng $\frac{a(l-c)}{b-c}$.

+ Khi tam giác *ABC* không cân ở *A* mà các điều kiện $c<l<b$ và $c>l>b$ không thoả mãn thì không tồn tại điểm *M* như bài toán yêu cầu.

Chương 4

12. Giá trị lớn nhất : $f(1)=16$. Giá trị nhỏ nhất : $f(-3)=f(5)=0$.

13. Giá trị nhỏ nhất : $f(1+\sqrt{2})=1+2\sqrt{2}$.

17. Giá trị lớn nhất : $\sqrt{6}$, giá trị nhỏ nhất : $\sqrt{3}$.

22. a) $S=\varnothing$. b) $S=[3\,;+\infty)$. c) $S=[2\,;3)\cup(3\,;+\infty)$; d) $S=\varnothing$. **23.** $2x-1-\frac{1}{x+3}\geq-\frac{1}{x+3}$.

24. $x - 2 \leq 0$ và $x^2(x-2) \leq 0$. **25.** a) $x < -\dfrac{4}{5}$; b) $x \leq -5$; c) $x > 1 - \sqrt{2}$; d) $x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

26. a) Nếu $m = 1$ thì $S = \mathbb{R}$. Nếu $m > 1$ thì $S = (-\infty ; m+1]$. Nếu $m < 1$ thì $S = [m+1 ; +\infty)$; b) Nếu $m = 2$ thì $S = \varnothing$. Nếu $m > 2$ thì $S = (3 ; +\infty)$. Nếu $m < 2$ thì $S = (-\infty ; 3)$;

c) Nếu $k = 2$ thì $S = \mathbb{R}$. Nếu $k > 2$ thì $S = \left(-\infty ; \dfrac{4-k}{k-2}\right)$. Nếu $k < 2$ thì $S = \left(\dfrac{4-k}{k-2} ; +\infty\right)$; d) Nếu $a = 3$ thì $S = \mathbb{R}$.

Nếu a > 3 thì $S = \left[\dfrac{2+a}{3-a} ; +\infty\right)$. Nếu $a < 3$ thì $S = \left(-\infty ; \dfrac{2+a}{3-a}\right]$. **27.** a) $S = \varnothing$; b) $S = (-\infty ; -3)$.

28. a) Nếu $m = -2$ thì $S = \varnothing$. Nếu $m > -2$ thì $S = \left(\dfrac{m^2+8}{m+2} ; +\infty\right)$. Nếu $m < -2$ thì $S = \left(-\infty ; \dfrac{m^2+8}{m+2}\right)$; b) Nếu $m = 3$ thì $S = \mathbb{R}$.

Nếu $m > 3$ thì $S = (-\infty ; m]$. Nếu $m < 3$ thì $S = [m ; +\infty)$; c) Nếu $k = -4$ thì $S = \varnothing$. Nếu $k > -4$ thì $S = \left[\dfrac{k+5}{k+4} ; +\infty\right)$. Nếu $k < -4$ thì $S = \left(-\infty ; \dfrac{k+5}{k+4}\right]$; d) Nếu $b = -1$ thì $S = \mathbb{R}$.

Nếu $b > -1$ thì $S = \left(-\infty ; \dfrac{b+2}{b+1}\right]$. Nếu $b < -1$ thì $S = \left[\dfrac{b+2}{b+1} ; +\infty\right)$. **29.** a) $x \geq \dfrac{5}{4}$; b) $x < -\dfrac{4}{5}$; c) $-\dfrac{26}{3} < x < \dfrac{28}{5}$; d) $\dfrac{11}{5} \leq x < \dfrac{5}{2}$.

30. a) $m < -5$; b) $m > -1$. **31.** a) $m \leq -\dfrac{7}{3}$; b) $m > \dfrac{72}{13}$. **34.** a) $S = (-1 ; 2] \cup [3 ; +\infty)$; b) $S = \left(-\infty ; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left[\dfrac{2}{11} ; 1\right)$; c) $S = (-\infty ; 1)$;

d) $S = [-5-2\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2} \; ; \; 5+2\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}]$.

35. a) $\sqrt{2} < x < 3$; b) $-1 < x < \dfrac{1}{2}$. **36.** a) Nếu $m = 2$ thì $S = \varnothing$. Nếu $m > 2$ thì $S = (m+2 ; +\infty)$. Nếu $m < 2$ thì $S = (-\infty ; m+2)$; b) Nếu $m = \dfrac{1}{2}$ thì $S = \mathbb{R}$. Nếu $m > \dfrac{1}{2}$ thì $S = [2m+1 ; +\infty)$. Nếu $m < \dfrac{1}{2}$ thì $S = (-\infty ; 2m+1]$; c) Nếu $m = \pm 1$ thì $S = \varnothing$. Nếu $m < -1$ hoặc $m > 1$ thì $S = (-\infty ; m^2+1)$. Nếu $-1 < m < 1$ thì $S = (m^2+1 ; +\infty)$;

d) Nếu $m = -1$ thì $S = \mathbb{R}$. Nếu $m < -1$ hoặc $m > 1$ thì $S = \left[\dfrac{m+1}{m-1} ; +\infty\right)$. Nếu $-1 < m < 1$ thì $S = \left(-\infty ; \dfrac{m+1}{m-1}\right]$. Nếu $m = 1$ thì $S = \varnothing$.

37. a) $S = (-\infty ; -1) \cup \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3} ; \dfrac{5}{4}\right)$;

b) $S = \left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{3}{2}\right) \cup (4 ; +\infty)$; c) $S = \left[-3 ; -\dfrac{1}{2}\right)$.

d) $S = \left(-\infty ; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left[0 ; \dfrac{1}{2}\right) \cup [8 ; +\infty)$.

38. a) Nếu $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thì $S = \left(-\infty ; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right)$. Nếu $m > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thì $S = \left(-\infty ; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (m ; +\infty)$. Nếu $m < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thì $S = (-\infty ; m) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right)$; b) Nếu $m = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ thì $S = (-\infty ; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3} ; +\infty)$. Nếu $m > \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ thì $S = (-\infty ; \sqrt{3}] \cup (2m-1 ; +\infty)$. Nếu $m < \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ thì $S = (-\infty ; 2m-1) \cup [\sqrt{3} ; +\infty)$.

39. a) $S = \{4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11\}$; b) $x = 1$.

40. a) $S = \{-2 ; 2\}$; b) $S = (-4 ; -1) \cup (2 ; 5)$.

41. a) Nếu $m \le \frac{\sqrt{7}}{2}$ thì $S = \varnothing$. Nếu $\frac{\sqrt{7}}{2} < m < \sqrt{5}$ thì $S = \left(\frac{\sqrt{7}}{2} ; m\right]$. Nếu $m \ge \sqrt{5}$ thì $S = \left(\frac{\sqrt{7}}{2} ; \sqrt{5}\right)$.

b) Nếu $m \le \frac{1}{2}$ thì $S = \left(\frac{1}{2} ; 1\right) \cup (3 ; +\infty)$.

Nếu $\frac{1}{2} < m < 1$ thì $S = [m ; 1) \cup (3 ; +\infty)$.

Nếu $1 \le m \le 3$ thì $S = (3 ; +\infty)$.

Nếu $m > 3$ thì $S = [m ; +\infty)$.

44. b) $T = 45x + 35y$ (nghìn đồng) ; c) 0,6 kg thịt bò và 0,7kg thịt lợn. **47.** b) (4 ; 1). **48.** a) $c = 9x + 7{,}5y$; c) Dùng 100 đơn vị vitamin *A* và 300 đơn vị vitamin *B* mỗi ngày. **49.** a) Dương với mọi $x \in \mathbb{R}$; b) Âm với mọi $x \in (-\infty ; 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3} ; +\infty)$ và dương với mọi $x \in (2 - \sqrt{3} ; 2 + \sqrt{3})$; c) Dương với mọi $x \ne \frac{\sqrt{3}}{2}$; d) Âm với mọi $x \in (-\infty ; -3 - 2\sqrt{2}) \cup (1 ; +\infty)$ và dương với mọi $x \in (-3 - 2\sqrt{2} ; 1)$. **50.** a) $m < \frac{1}{2}$; b) $m \ge -2$.

51. a) $m \in \mathbb{R}$; b) Không có giá trị nào của m thoả mãn điều kiện đòi hỏi. **53.** a) $\left(-\infty ; -\frac{6}{5}\right) \cup (2 ; +\infty)$; b) $\varnothing$; c) $\mathbb{R}$; d) $[-2 ; 3]$.

54. a) $(-\infty ; 1) \cup (2 ; 4) \cup (7 ; +\infty)$; b) $(-\infty ; -2) \cup [1 ; 3] \cup (5 ; +\infty)$; c) $\left[-6 ; -\frac{1}{2}\right] \cup [5 ; +\infty)$; d) $[-\sqrt{3} ; \sqrt{3}]$. **55.** a) $m \le -\frac{10}{3}$ hoặc $m \ge 1$; b) $\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \le m \le \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$. **56.** a) $(-1 ; 2)$; b) $\left[-\frac{3}{4} ; \frac{1}{2}\right)$; c) $\left[-5 ; \frac{-5-\sqrt{57}}{4}\right] \cup \left[\frac{-5+\sqrt{57}}{4} ; 2\right]$; d) $(-\infty ; -2) \cup (3 ; +\infty)$. **57.** $m \le -2 - 2\sqrt{3}$ hoặc $m \ge -2 + 2\sqrt{3}$. **59.** $m > 5$. **60.** a) $(-3 ; -2) \cup [-1 ; 1]$; b) $(1 ; 2) \cup (3 ; 4) \cup (5 ; +\infty)$.

61. a) $\left[-\frac{5}{2} ; \frac{1}{2}\right]$; b) $(-\infty ; -4] \cup \left(-\frac{1}{2} ; +\infty\right)$.

62. a) $[2 ; 5]$; b) $\left(\frac{\sqrt{137} - 9}{4} ; 2\right]$; c) $\left[-\frac{4}{3} ; -1\right] \cup [1 ; 3)$ **63.** $-\frac{5}{3} \le a < 1$.

64. $m < -\frac{8}{5}$ hoặc $m > 0$. **65.** a) $x = -\frac{1}{11}$; b) $x = \frac{2}{3}$; c) $[-1 ; 4]$; d) $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right)$.

66. a) $x = \sqrt{3} - 1$; b) $x = 16$; c) $x = -1 \pm \sqrt{2}$; d) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{37}}{2}$. **67.** a) $\left[2 ; \frac{7}{3}\right)$; b) $\left[\frac{5}{2} ; +\infty\right)$; c) $(-\infty ; -1 - \sqrt{3}) \cup (-1 + \sqrt{3} ; +\infty)$.

d) $(-\infty ; -2]$. **68.** a) $\mathbb{R}$; b) $(-\infty ; -\frac{1}{3}) \cup (3 ; +\infty)$; c) $\left[0 ; \frac{7-\sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{7+\sqrt{29}}{2} ; +\infty\right)$

d) $(-\infty ; -2] \cup [23 ; +\infty)$. **69.** a) $x = 1 \pm \sqrt{5}$, $x = 0$ và $x = -2$; b) $\left(-\infty ; \frac{1}{3}\right]$; c) $(-\infty ; 0] \cup [2 ; 3) \cup (3 ; +\infty)$; d) $x = \frac{1}{5}$ và $x = 7$.

70. a) $\left[-\frac{1}{11} ; +\infty\right)$; b) $(-\infty ; -2] \cup [1 ; +\infty)$.

71. a) $x = 2$; b) $x = 1$; $x = -4$.

72. a) $\left[\frac{\sqrt{6}}{3} - 1 ; +\infty\right)$; b) $(5 ; +\infty)$; c) $(-\infty ; 0] \cup [34 ; +\infty)$. **73.** a) $(-\infty ; -3] \cup [13 ; +\infty)$; b) $(-\infty ; -2]$; c) $[-5 ; -1) \cup (1 ; +\infty)$.

74. a) $m < -1$ hoặc $m > \frac{5}{4}$; b) $-1 < m < 1$ hoặc $m = \frac{5}{4}$; c) $1 < m < \frac{5}{4}$. **75.** $a = -1$.

78. a) 2 ; b) 2. **79.** $|m| < \frac{5\sqrt{2}}{2}$. **80.** $0 < m < 2$.

81. a) Nếu $a < 1$ hoặc $a > 2$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\frac{2}{a^2 - 3a + 2} ; +\infty\right)$;

Nếu $1 < a < 2$ thì tập nghiệm là $\left(-\infty ; \dfrac{2}{a^2-3a+2}\right)$;

Nếu $a = 1$ hoặc $a = 2$ thì tập nghiệm là $\varnothing$.

b) Nếu $m \le -7$ hoặc $m \ge 1$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$; Nếu $-7 < m < 1$ thì tập nghiệm là

$$\left(-\infty ; \frac{9-m-\sqrt{-7(m^2+6m-7)}}{4}\right] \cup \left[\frac{9-m+\sqrt{-7(m^2+6m-7)}}{4} ; +\infty\right).$$

82. a) $(2 ; 4) \cup (5 ; +\infty)$; b) $(-\infty ; 1) \cup (2 ; 3] \cup [4 ; +\infty)$. **83.** a) $m \le 4 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; b) $m \le -1$ hoặc $m > 2$. **84.** a) $x = \pm 1$ và $x = 5$; b) $x = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **85.** a) $[6 ; 7]$; b) $(-\infty ; 0] \cup [2 ; +\infty)$; c) $\left(-\infty ; \dfrac{2\sqrt{13}-8}{3}\right]$; d) $[-4 ; -3] \cup [0 ; 1]$. **86.** a) $a < -\dfrac{4}{3}$; b) $a > 1$. **87.** a) (C) ; b) (B) ; c) (D). **88.** a) (A) ; b) (B) ; c) (C). **89.** a) (C) ; b) (B) ; c) (D).

Chương 5

1. a) Kích thước mẫu là 80. b) 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7. **2.** a) Kích thước mẫu là 30. b) 40 ; 42 ; 45 ; 50 ; 53 ; 57 ; 59 ; 65 ; 70 ; 75 ; 84 ; 85 ; 90 ; 100 ; 133 ; 141 ; 150 ; 165. **3.** Có sáu lớp là các đoạn [50 ; 124], [125 ; 199], [200 ; 274], [275 ; 349], [350 ; 424] và [425 ; 499]. Các tần số tương ứng : 3, 5, 7, 5, 3 và 2. Các tần suất tương ứng : 12%, 20%, 28%, 20%, 12% và 8%. **4.** Có sáu lớp là [36 ; 43], [44 ; 51], [52 ; 59], [60 ; 67], [68 ; 75] và [76 ; 83]. Các tần số tương ứng : 3, 6, 6, 8, 3, 4. Các tần suất tương ứng : 10,0%, 20,0%, 20,0%, 26,7%, 10,0%, 13,3%. **6.** b) Có bảy lớp [26,5 ; 48,5), [48,5 ; 70,5), [70,5 ; 92,5), [92,5 ; 114,5), [114,5 ; 136,5), [136,5 ; 158,5), [158,5 ; 180,5). Các tần số tương ứng : 2, 8, 12, 12, 8, 7, 1. **7.** b) Có sáu lớp [0 ; 2], [3 ; 5], [6 ; 8], [9 ; 11], [12 ; 14], [15 ; 17]. Các tần số tương ứng : 10, 23, 10, 3, 3, 1. **8.** Có bảy lớp : [25 ; 34], [35 ; 44], [45 ; 54], [55 ; 64], [65 ; 74], [75 ; 84], [85 ; 94]. Các tần số tương ứng : 3, 5, 6, 5, 4, 3, 4. **9.** a) $\overline{x} = 15{,}23$; b) $M_e = 15{,}5$; c) $s^2 \approx 3{,}96$; $s \approx 1{,}99$. **10.** $\overline{x} \approx 48{,}35$ g ; $s^2 \approx 194{,}64$; $s \approx 13{,}95$ g. **11.** a) $\overline{x} \approx 2{,}35$; b) $s^2 \approx 1{,}57$, $s \approx 1{,}25$. **12.** a) $\overline{x} \approx 15{,}67$, $M_e = 15{,}5$; b) $s^2 \approx 5{,}39$; $s \approx 2{,}32$. **13.** a) $\overline{x} \approx 48{,}39$; $M_e = 50$. b) $s^2 \approx 121{,}98$; $s \approx 11{,}04$. **14.** a) $\overline{x} \approx 554{,}17$; $M_e = 537{,}5$. b) $s^2 \approx 43\,061{,}81$; $s \approx 207{,}51$. **15.** a) Trên con đường A : $\overline{x} \approx 73{,}63$ km/h, $M_e = 73$ km/h ; $s^2 \approx 74{,}77$, $s \approx 8{,}65$ km/h. Trên con đường B : $\overline{x} = 70{,}7$ km/h, $M_e = 71$ km/h ; $s^2 \approx 38{,}21$, $s \approx 6{,}18$ km/h. **16.** (C). **17.** (C). **18.** a) $\overline{x} \approx 40$ g ; b) $s^2 \approx 17$, $s \approx 4{,}12$ g. **19.** a) $\overline{x} \approx 54{,}7$ phút. b) $s^2 \approx 53{,}71$; $s \approx 7{,}33$ phút. **20.** b) $\overline{x} \approx 17{,}37$; $s \approx 3{,}12$; c) $M_e = 17$, $M_0 = 17$ và $M_0 = 18$. **21.** a) $\overline{x} \approx 77$; b) $s^2 \approx 122{,}67$; $s \approx 11{,}08$.

Chương 6

1. a) Sai ; b) Đúng ; c) Đúng ; d) Đúng. **2.** Kim phút : $\dfrac{\pi}{2}.1{,}75 \approx 2{,}75$ (m), Kim giờ : $\dfrac{\pi}{24}.1{,}26 \approx 0{,}16$ (m). **4.** Theo thứ tự là (xấp xỉ) : 0,375 rad ; 1,325 rad ; $143^\circ 14'$; $36^\circ 29'$. **5.** Theo thứ tự là : $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$, $-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $-\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. **7.** Theo thứ tự là : $180^\circ, -120^\circ, -60^\circ, -60^\circ$.

8. sđ $\overset{\frown}{A_0A_i} = i\dfrac{2\pi}{5} + k2\pi$ (hay $i.72^\circ + k360^\circ$) $(i = 0, 1, 2, 3, 4 ; k \in \mathbb{Z})$; sđ $\overset{\frown}{A_iA_j} = (j-i)\dfrac{2\pi}{5} + k2\pi$ (hay $(j-i)72^\circ + k360^\circ$) $(i, j = 0, 1, 2, 3, 4 ; i \ne j ; k \in \mathbb{Z})$. **9.** a) 270, b) 280, c) $\dfrac{2\pi}{7}$, d) $\dfrac{7\pi}{11}$.

10. Theo thứ tự là 0, $-\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{3\pi}{4}$. **13.** Không thể. **14.** a) Sai, b) Sai, c) Sai, d) Đúng, e) Sai, g) Đúng.

15. $M(x\,;y)$, $x^2+y^2=1$ và theo thứ tự : a) $x \geq 0$, b) $y \geq 0$, c) $y \geq 0$, $y \neq 1$. **16.** a) Theo thứ tự : dương, dương, âm, dương. b) Theo thứ tự : dương, dương, âm. **17.** Theo thứ tự là : a) $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; b) $(-1)^k$, 0, 0, không xác định ; c) 0, $(-1)^k$, không xác định, 0 ; d) $(-1)^k\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $(-1)^k\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 1, 1. **18.** a) $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $\tan\alpha = -\sqrt{15}$; b) $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$; c) $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

19. a) $|\sin\alpha|$, b) 0, c) $\tan^2\alpha$. **21.** M trong góc I, III thì $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ cùng dấu, M trong góc II, III thì $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ khác dấu. **23.** a) 3, b) -1, c) -1. **24.** a) sai, b) sai, c) đúng, d) sai, e) đúng, g) đúng. **25.** $\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$, $\sin\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos\alpha$, $\tan\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right) = -\cot\alpha$, $\cot\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right) = -\tan\alpha$.

26. a) 4, b) -1, c) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$. **27.** Theo thứ tự là $-0{,}342$; $0{,}342$; $-0{,}309$. **28.** Theo thứ tự là : $\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right)$, $\left(\dfrac{4}{5};-\dfrac{3}{5}\right)$, $\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{4}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{4}{5}\right)$.

29. $\cos(-75^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\sin(-75^\circ) = -\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, $\tan(-75^\circ) = -(\sqrt{3}+2)$, $\cot(-75^\circ) = \sqrt{3}-2$.

30. Có. **31.** Theo thứ tự là : âm, dương, âm, dương, âm. **32.** a) $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$, $\tan\alpha = -\dfrac{4}{3}$.

b) $\sin\alpha = \dfrac{15}{17}$, $\tan\alpha = -\dfrac{15}{8}$.

c) $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

33. a) 0, b) $\cos(2\pi-\alpha) = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan(\alpha-7\pi) = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \mp\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

35. $\dfrac{m}{2}(3-m^2)$. **37.** b) $M = \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}};-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$, $\cos(Ox, OP) = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin(Ox, OP) = -\dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

38. a) sai, b) sai, c) đúng, d) sai, e) sai, g) sai.

39. Côsin, sin, tang, côtang của a) 75° theo thứ tự là : $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$, $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$; b) 15° theo thứ tự là : $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$; $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$.

41. a) $\sin 2\alpha = -\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$, $\cos 2\alpha = \dfrac{7}{9}$, $\tan 2\alpha = -\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$, $\cot 2\alpha = -\dfrac{7\sqrt{2}}{8}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}}$, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{6}}$, $\tan\dfrac{\alpha}{2} = 3+2\sqrt{2}$, $\cot\dfrac{\alpha}{2} = 3-2\sqrt{2}$.

44. a) $\sin\alpha$, b) $-\sin 2\alpha$. **46.** b) $\sin20^\circ\sin40^\circ\sin80^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$, $\tan20^\circ\tan40^\circ\tan80^\circ = \sqrt{3}$.

49. a) $\sin^2\alpha$; b) 0. **53.** $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

54. a) $x = \dfrac{v^2}{g}\sin 2\alpha$; b) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{v^2}{g} \approx 653$ (m).

55. a) đúng, b) đúng, c) đúng, d) sai.

56. a) $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$; $\cos 2\alpha = \dfrac{7}{25}$; $\sin\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

b) $\dfrac{121-36\sqrt{10}}{41}$, c) $-\dfrac{3}{5}$, d) $\dfrac{59}{72}$, e) $\dfrac{\sqrt{2}}{16}$.

60. (B), **61.** (C), **62.** (B), **63.** (D), **64.** (A), **65.** (C), **66.** (D), **67.** (A), **68.** (D), **69.** (D).

Câu hỏi và bài tập ôn tập cuối năm

1. a) $a \leq -1$ và $b > 1$; b) $c < -1$; c) $(-\infty\ ; a) \cup [b\ ; +\infty)$; d) $a \leq 1, b > -1$ và $a < b$. **2.** a) Không chẵn, không lẻ ; b) Không chẵn không lẻ ; c) Hàm số chẵn ; d) Hàm số lẻ.

3. a) $m = -1$; b) $m = 1$; c) $m \neq -1$.

4. a) Vì $y = \dfrac{2}{x}$ là hàm số lẻ ; b) Sang phải 3 đơn vị, tâm đối xứng là $(3\ ;\ 0)$; c) xuống dưới 2 đơn vị, tâm đối xứng là $(0\ ; -2)$. **5.** b) Không có điểm chung nếu $m < -\dfrac{25}{4}$, có 1 điểm chung nếu $m = -\dfrac{25}{4}$, có 2 điểm chung nếu $m > -\dfrac{25}{4}$. c) $\left(\dfrac{1}{2}\ ; 1+m\right)$ với $m > -\dfrac{25}{4}$. **6.** a) $k = 1, k = -7$; b) $x_1 \approx 0,276$, $x_2 \approx 5,547$. **7.** a) $\approx 22,93$; b) $x_1 \approx -0,73$, $x_2 \approx -4,73$. **8.** a) Vô nghiệm nếu $m < 0$ hoặc $m > 27$, một nghiệm dương nếu $m = 0$ hoặc $m = 27$, hai nghiệm dương nếu $0 < m < 2$ hoặc $3 < m < 27$, hai nghiệm trái dấu nếu $2 < m < 3$, một nghiệm 0 và một nghiệm dương nếu $m = 2$ hoặc $m = 3$. b) Vô nghiệm nếu $-1 < m < \dfrac{3}{5}$, hai nghiệm trái dấu nếu $m < -3$ hoặc $m > 1$, hai nghiệm dương nếu $-3 < m < -1$ hoặc $\dfrac{3}{5} < m < 1$, một nghiệm 0 và một nghiệm dương nếu $m = -3$, một nghiệm dương nếu $m = \pm 1$ hoặc $m = \dfrac{3}{5}$. **9.** a) $\left\{\dfrac{m+4}{m-1}\right\}$ nếu $m \neq 1$ và $m \neq -\dfrac{3}{2}$, vô nghiệm nếu $m = 1$ hoặc $m = -\dfrac{3}{2}$. b) $\left\{\dfrac{5}{m}\ ; \dfrac{1}{m+2}\right\}$ nếu $m \neq 0$ và $m \neq -2$, $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ nếu $m = 0$, $\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$ nếu $m = -2$. c) $\left\{-\dfrac{1}{m}\ ; 1\right\}$ nếu $-1 \leq m < 0$, $\{1\}$ nếu $m < -1$ hoặc $m \geq 0$.

10. a) $(m+1)x^2 - (3m+4)x - (3m+4) = 0$ $(m \neq -1)$; b) Vô nghiệm nếu $-\dfrac{4}{3} < m < -\dfrac{8}{7}$, hai nghiệm âm nếu $-\dfrac{8}{7} \leq m < -1$, hai nghiệm trái dấu nếu $m < -\dfrac{4}{3}$ hoặc $m > -1$, một nghiệm $x = 0$ nếu $m = -\dfrac{4}{3}$.

11. a) $(x\ ;\ y) = \left(\dfrac{m+2}{m-1}\ ; \dfrac{-3(m+1)}{m-1}\right)$ nếu $m \neq 1$, vô số nghiệm nếu $m = 1$; b) $(x\ ;\ y) = (3\ ; -m-4)$ nếu $m \neq -4$, vô số nghiệm nếu $m = -4$.

12. a) $(1\ ; -1)$, $\left(-\dfrac{2}{5}\ ; \dfrac{9}{5}\right)$; b) $(2\ ;\ 1), (1\ ;\ 2)$; c) $(-1\ ;\ 0), (0\ ;\ 1)$. **14.** a) $2(\sqrt{2}-1)$; b) $3\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$.

15. $\dfrac{25}{8}$. **16.** a) $x > 2$; b) $-2 < x < -1$;

17. a) $x = -\dfrac{4}{9}$; b) $-1 \pm 2\sqrt{2}$; c) $\dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

18. a) $(-\infty\ ; -1) \cup \left(-\dfrac{2}{3}\ ; -\dfrac{1}{3}\right) \cup (2\ ; +\infty)$; b) $\left(-\infty\ ; -\dfrac{5}{2}\right] \cup (-1\ ; +\infty)$; c) $[1\ ; +\infty)$.

19. a) $\overline{x} = 66,66$; b) $M_e = 65,5$. **20.** b) $\overline{x} \approx 216,17$ nghìn đồng ; $s^2 \approx 9841,27$; $s \approx 99,20$. **21.** b) $\overline{x} \approx 37,33$; d) $s^2 \approx 81,22$; $s \approx 9,01$.

22. a) $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}{12}$,

$\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{-6 - \sqrt{35}}{12}$,

$\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{12}$,

$\sin(\alpha-\beta) = \dfrac{-6 + \sqrt{35}}{12}$, b) $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\tan\alpha = -2$, $\cot\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

23. $\tan 10^\circ \tan 50^\circ \tan 110^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **25.** $C = \sqrt{2}$, $\beta = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $C = -\sqrt{2}$, $\beta = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

MỤC LỤC